المستوى: الثالثة ثانوي.

الشعب: ع .التجريبية، رياضيات، تقني رياضي.

Bac 2020

Facebook : تلاميذ الاستاذ عبعوب محمد

السلسلة 04
المتتاليات العددية

التمرين 01 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$

1. أ- ارسم في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحني (d) الممثل للدالة f المعرفة على R ب : $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

ب- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل الحدود : u_0، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

ج- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

2. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$ و ماذا تستنتج؟

ب- تحقق أن (u_n) متناقصة .

ج- استنتج أن (u_n) متقاربة ؟ و أحسب نهايتها

التمرين 02 :

(v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 و $\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 15 \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 14 \end{cases}$

1. عين الحدود v_2 ثم v_1 و v_3 و أساس المتتالية .
2. احسب الحد العام v_n بدلالة n .
3. عبر بدلالة n عن المجموع $s_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$
4. عين العدد n بحيث يكون : $s_n = 40$



التمرين 03 :

(u_n)متتالية حسابية متناقصة حدها الأول u_0 و أساسها r علما أن:

$$u_2 + u_3 + u_4 = -15 \quad و \quad u_2 \times u_3 \times u_4 = -105$$

1. احسب الحد u_3 ثم استنتج r و الحد الأول u_0 .
2. عين الحد العام u_n بدلالة n ثم احسب المجموع $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

التمرين 04 :

$(u_n)_{n\in N^*}$ متتالية هندسية حدودها موجبة بحيث : $u_1 = 1$ و $u_3 + u_5 = 20$

1- أوجد أساس هذه المتتالية و حدد اتجاه تغيرها و تقاربها

2- احسب بدلالة n المجموعين : $G_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ و $s_n = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots + u_n^2$

<u>التمرين 05 :</u>

1. $(u_n)_{n\in N}$ متتالية حسابية متناقصة حدها الأول u_0 و أساسها r .

أ- عين u_2 و r علما أن
$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=24 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=210 \end{cases}$$

ب- استنتج u_n بدلالة n ثم احسب المجموع : $s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

2. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي : $v_n=e^{14-3n}$

أ- بين أن $(v_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

ب- احسب المجموع $T_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و الجداء $P_n=v_0.v_1.v_2.\ldots.v_n$

ج - احسب : $\lim_{n\to+\infty}T_n$ و $\lim_{n\to+\infty}P_n$

<u>التمرين 06 :</u>

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$ و $u_0=\frac{5}{2}$

1. أ- ارسم في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحني (d) الممثل للدالة f المعرفة على R ب : $f(x)=\frac{2}{3}x+2$

ب- باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل الحدود : u_0،u_1،u_2،u_3 و u_4

ج- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

2. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq 6$

ب- تحقق أن (u_n) متزايدة

ج- هل (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-6$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$

<u>التمرين 07 :</u>

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي : $u_0=3$

$$u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{u_n+1}$$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>2$

2. ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ و استنتج أن $(u_n)_{n\in N}$ متقاربة و احسب $\lim u_n$

3. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على N كمايلي : $v_n=\frac{1}{u_n-2}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) حسابية حدد أساسها و حدها الأول

ب- احسب نهاية المتتالية (u_n) بطريقة أخرى .

التمرين 08 :

/1 نعرف(u_n) بالعبارة $u_0 = 1$: و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{2}$

لتكن f الدالة الممثلة بالعبارة : $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

1. باستعمال $(\Delta) : \ y = x$ مثل على محور الفواصل الحدود u_1،u_2،u_3 و u_4
2. أعط تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n)

/2 نعرف (v_n) بالعبارة $v_n = \ln\left(u_n + \frac{3}{2}\right)$

1. برهن بالتراجع أنه من أكل كل n : $u_n + \frac{3}{2} > 0$
2. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)
3. بين أن (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول
4. اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n
5. احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ و ماذا تستنتج ؟

التمرين 09 :

(u_n) متتالية معرفة على N ب : $u_0 = e^3$ و $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$

(v_n) متتالية معرفة على N ب : $v_n = \ln(u_n) - 2$

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، عين أساسها و حدها الأول .
2. استنتج v_n ثم $\ln(u_n)$ بدلالة n .
3. أ- ما هي نهاية المتتالية (v_n)

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو e^2

التمرين 10 :

(u_n) متتالية عددية معرفة ب
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \end{cases}$$

1. احسب الحدود : u_1 ، u_2 و u_3 و ضع تخمينا حول اتجاه التغير (u_n)
2. أثبت أنه لكل عدد طبيعي n فإن : $u_n < 1$
3. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . بين أن (u_n) متقاربة و احسب نهايتها .
4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة ب : $v_n = \frac{1}{1-u_n}$

أ- احسب الحدود : v_0 ، v_1 و v_2

ب-برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها .

ج- أحسب v_n ثم u_n بدلالة n ، استنتج من جديد نهاية المتتالية (u_n)

5. احسب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و π_n الجداء : $\pi_n = u_0.u_1 \ldots.u_n$

التمرين 11 :

لتكن (u_n) متتالية معرفة على N كما يلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n

$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$ و (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 4$

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2. اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n.

3. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على N.

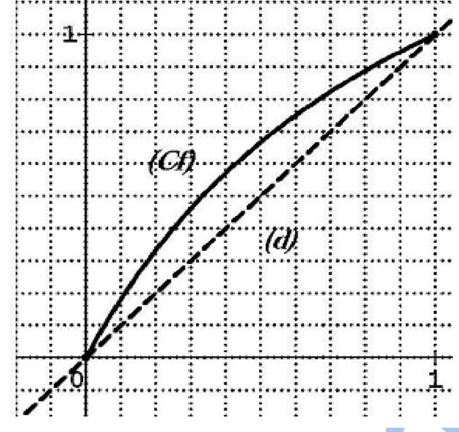
4. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

5. لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n+5} - 1\right)$

أ- بين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على N .

ب- احسب $\lim_{n\to+\infty}(u_n - w_n)$.

التمرين 12 :



في الشكل المقابل نعتبر الدالة f المعرفة على

المجال $[0,1]$ بالعبارة : $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

و(d) المستقيم الذي معادلته $y = x$

1. (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على N

كما يأتي : $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل

عدد طبيعي n حيث $u_{n+1} = f(u_n)$

أ. أعد الرسم على ورقة الاجابة ثم مثل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

2. أ. اثبت ان f متزايدة على المجال $[0,1]$.

ب. برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

ج. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على N كما يلي $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

أ. برهن أن (v_n) متتالية هندسية واساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الاول v_0

ب. أحسب نهاية (u_n)

التمرين 13 :

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على N بحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2} - n}$

1. بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

2. احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$. وماذا تستنتج ؟

3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n)$.

1. عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n).

2. أ- احسب بدلالة n العدد p_n حيث : $p_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n)$

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $p_n + 4n > 0$.

التمرين 14 :

I) المتتالية (v_n) معرفة على N ب : $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد اساسها وحدها الاول

2. احسب $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) المعرفة ب $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

1. برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 6$.

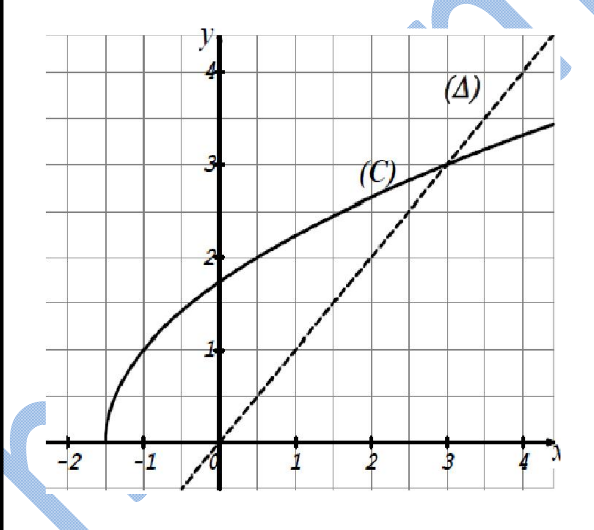
2. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3. أ. برهن من اجل كل عدد طبيعي n : $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$

ب. بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$

استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 15 :



لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1. ليكن المنحنى البياني على المجال $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ كمايلي

$h(x) = \sqrt{2x + 3}$ و (C_h) تمثيلها البياني و (Δ)

المستقيم الذي معادلته $y = x$

أ. مثل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 على البيان

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2. برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

3. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4. استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 16 :

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = \frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$

1. برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$.
2. بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n{}^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$ استنتج ان(u_n) متزايدة .
3. برر لماذا(u_n) متقاربة .
4. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة : $v_n = \ln(u_n - 3)$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب إيجاد أساسها $\frac{1}{2}$ ثم احسب حدها الأول

ب- اكتب بدلالة n كلا من v_n و u_n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

ج- نضع $p_n = (u_0 - 3) \times (u_1 - 3) \times (u_2 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$

اكتب p_n بدلالة n ثم بين ان $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{16}$

التمرين 17 :

(u_n) المتتالية العددية معرفة ب : $u_0 = e^2 - 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$$

1. احسب الحدود u_1 و u_2 و u_3 .
2. اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$.



3. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .هل هي متقاربة؟ علل.
4. نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3(1 + u_n)$.

أ. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب. أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

ج. بين أنه من اجل كل n من N : $\ln v_0 + \ln v_1 + .. + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$.

التمرين 18 :

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

I) f دالة معرفة على المجال $[0, +\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) منحناها البياني .

1. عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0, +\infty[$.
2. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم(D) ذي المعادلة $y = x$.
3. مثّل(C_f) و(D) على المجال $[0,6]$.

II)نعتبرالمتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على N كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ ، $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1. أ) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود : u_0،u_1،u_2،u_3 و v_0،v_1،v_2،v_3 دون حسابها.

ب) خمّن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

2.أ) أثبت أنه من أجل كل n من N : $2 \leq u_n < \alpha$ و $\alpha < v_n \leq 5$ حيث $\alpha = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

3.أ) أثبت أنه من أجل كل n من N : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(v_n - u_n)$.

ب) بين أنه من أجل كل n من N : $0 < v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

ج) استنتج أن : $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$; ثم حدّد نهاية كل من (u_n) و (v_n).

التمرين 19 :

1) $(u_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية متزايدة حدها الأول u_1 و أساسها r .

أ- عين u_2 و r استنتج الحد الاول u_1علما أن : $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

ب- اكتب u_n بدلالة n ثم احسب المجموع : $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

ثم عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون : $s_n = 728$

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = u_n + \frac{3}{2}v_n$

أ- احسب v_2 ،v_3 $\qquad$ $v_1 = 2$

ب- لتكن المتتالية (w_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

- برهن أن (w_n) متتالية هندسية .

-عبر عن w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n

التمرين 20 :

I) لتكن (v_n) متتالية معرفة كما يلي $\begin{cases} v_0 = \alpha \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{9}{4} \end{cases}$

-عين α حتى تكون (v_n) ثابتة

II) نضع $\alpha = 4$

1. احسب v_1 ، v_2 و v_3

2. نعرف (u_n) كما يلي : $u_n = v_n - 3$

أ- أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- اكتب u_n و v_n بدلالة n

ج- احسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ بدلالة n

د- احسب المجموع : $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ بدلالة n

ه- احسب المجموع : $Q_n = u_0 + 4u_1 + 4^2u_2 + 4^3u_3 + \cdots + 4^n u_n$ بدلالة n

و- احسب الجداء : $P_n = u_0 . u_1 . u_2 \dots . u_n$ بدلالة n

التمرين 21 :

(u_n) متتالية معرفة على N كما يلي : $u_0 = 2$ و $u_1 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+2} = \frac{6}{5}u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ و المتتالية (v_n) معرفة على N كمايلي : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
2. احسب المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$ بدلالة n.
3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + 2$ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة .

التمرين 22 :

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 و أساسها r

1. أ- احسب u_1 و r علما أن : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \\ u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = 74 \end{cases}$

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم عين أصغر عدد طبيعي n يحقق : $u_n > 5978$

2. (v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 و أساسها q .

نضع : $s_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

عين v_1 و q حتى يكون $2s_n = n(3n + 7)$ من أجل كل n من N^*

التمرين 23 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in N}$ المعرفة كما يلي : $n \in N$ $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n + 1}{u_n + 4} \end{cases}$

1. أ- احسب u_1 و u_2

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$

ج- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n \in N}$ ثم استنتج أنها متقاربة

2. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة لكل عدد طبيعي n ب: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ-برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- احسب v_n بدلالة n

ج – استنتج أن : $u_n = \frac{5^{n+1} + 3^{n+1}}{5^{n+1} - 3^{n+1}}$ ثم احسب $\lim u_n$

4. احسب بدلالة n كلا من : $s_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2$

والجداء $P_n = v_0 . v_1 . v_2 . \dots . v_n$

التمرين 24 :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس مثل $y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

1. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على المجموعة الأعداد

الطبيعية N و من أجل كل عدد طبيعي n
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} \end{cases}$$

أ- مثل على محور الفواصل الحدود التالية : $u_3, u_2, u_1, u_0;$ دون حسابها مبرزا خطوط الرسم .

ب- عين إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D)

ج- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2. أ- باستعمال الاستدلال بالتراجع ، اثبت انه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{2}{3}$

ب- استنتج اتجاه تغير المتتالية(u_n).

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، و استنتج عبارة u_nبدلالة n .

ج- احسب بدلالة nالمجموع s_n حيث : $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

و استنتج المجموع s'_n حيث : $s'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

التمرين 25 :

(u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$

أ-احسب : u_3, u_2, u_1

1. (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n = u_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

أ - برهن بالتراجع أن المتتالية (v_n) ثابتة

ب-استنتج عبارة u_n بدلالة n

ج- احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

2. (w_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $w_n = \frac{2}{3}u_n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

أحسب المجموع : $s = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

التمرين 26 :

لتكن (u_n)متتالية معرفة كما يلي : $u_{n+2}=\frac{3}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$ و $u_1=2$ ، $u_0=1$

1. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة كمايلي : $v_n=u_{n+1}-u_n$

-برهن أن(v_n) متتالية هندسية عين أساسها و حدها الأول

2. استنتج v_n بدلالة n

3. برهن أنه من أجل كل n : $u_n=u_0+(v_0+v_1+\cdots+v_{n-1})$

4. استنتج u_n بدلالة n

التمرين 27 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان ب : $\begin{cases} v_0=4 \\ v_{n+1}=\frac{v_n+u_{n+1}}{2} \end{cases}$ ، $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\frac{v_n+u_n}{2} \end{cases}$

1.احسب : u_1 و v_1 ، u_2 و v_2

2. لتكن المتتالية (w_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب : $w_n=v_n-u_n$

أ- برهن أن (w_n) متتالية هندسية .ب)عبر عن w_n بدلالة n

3. ادرس اتجاه كل من (u_n) و (v_n) ثم برهن أنهما متجاورتان

4. لنفرض المتتالية (T_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $T_n=\frac{u_n+2v_n}{3}$

أ- برهن أن المتتالية (T_n) ثابتة .

ب- استنتج u_n و v_n بدلالة n

ج- احسب نهاية كل منهما بطريقتين

التمرين 28 :

$(u_n)_{n\in N^*}$ متتالية هندسية متناقصة حيث : $u_1\times u_2\times u_3=64$ و $u_1^2+u_2^2+u_3^2=84$

1. احسب الحدود : u_2 ثم u_3،u_1 و الأساس r للمتتالية .

2. عبر عن u_n بدلالة n و ادرس تقارب المتتالية $(u_n)_{n\in N^*}$.

3. احسب بدلالة n المجموع S حيث : $S=u_1+u_2+\cdots+u_n$ و $\lim_{n\to+\infty} S$.

4. احسب بدلالة n المجموع S' حيث : $S'=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}$.

التمرين 29 :

1. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1,2]$ بالعبارة : $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$

أ-بين أن الدالة f متزايدة تماما على I

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2. (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على N كما يأتي : $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، u_n ينتمي إلى I

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة

3. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

ب- عين النهاية : $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 30 :

I) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي : $u_n = e^{-\frac{1}{3}+2n}$

1. بين أن $(u_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول.
2. احسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ و $k_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$.
3. عين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = \frac{e^{-\frac{1}{3}}}{1-e^2}(1 - e^{10})$.

II) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in N}$ المعرفة : $v_n = \ln(u_n)$.

1. ما طبيعة المتتالية (v_n).
2. احسب بدلالة المجموع حيث : $G_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
3. عين العدد الطبيعي n علما ان : $G_n = \frac{160}{3}$.

التمرين 31 :

$(u_n)_{n\in N^*}$ متتالية عددية حدودها موجبة معرفة كما يلي : $\begin{cases} u_1 = e^2 \\ (u_{n+1})^2 . e = u_n \end{cases}$

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in N^*}$ المعرفة كما يلي : $v_n = \frac{1+\ln u_n}{2}$

1. أثبت أن $(v_n)_{n\in N^*}$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول
2. اكتب v_n ثم u_n بدلالة n . 3/ ادرس تقارب المتتالية (u_n)
4. احسب الجداء s بدلالة n حيث : $s = u_1 . u_2 . \dots . u_n$
5. ما هي طبيعة المتتالية (t_n) حيث : $t_n = \ln v_n$

التمرين 32 :

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ ، $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$

1. أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
2. أحسب w_n بدلالة n ما هي نهاية (w_n) ؟
3. أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ما هي نهاية (t_n)؟
4. أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .
5. استنتج نهاية u_n و نهاية v_n

التمرين 33 :

المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ معرفة بحدها الأول u_0 و بعلاقة التراجع الآتية :

$$u_{n+1} = \frac{7u_n+2}{u_n+8}$$ من أجل كل عدد طبيعي n

1. عين قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.
2. نفرض فيما يلي : $u_0 = 0$

أ- احسب u_2 ، u_1 ثم اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 1$

ب-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج تقارب المتتالية (u_n)و احسب نهايتها .

3. لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n = \frac{u_n+2}{u_n-1}$

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين حدها الأول و أساسها .

ب- عبر عن u_n بدلالة n ثم احسب نهاية (u_n)

ج- احسب كلا من S_n و P_n إذا علمت أن :

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n \quad \text{و} \quad S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

التمرين 34 :

1. $(u_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية حدودها موجبة حيث :

$$\ln u_2 - \ln u_4 = 4 \quad \text{و} \quad \ln u_1 + \ln u_5 = -12$$

- عين أساس هذه المتتالية الهندسية وحدها u_0 أحسب u_n بدلالة n
- نسمي s_n المجموع : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. أحسب s_n بدلالة n ثم $\lim_{n\to+\infty} s_n$

2. $(v_n)_{n\in N}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$

- بين أن $(v_n)_{n\in N}$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .
- نسمي T_n المجموع : $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. عين العدد الطبيعي n حتى يكون : $T_n^2 = 2^{30}$

التمرين 35 :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة ب : $u_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 3u_n + 1$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعيn ب : $v_n = u_n + \frac{1}{2}$

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات ، إجابة واحدة فقط منها صحيحة ، حددها مع التعليل .

1. المتتالية (v_n) :

أ- حسابية. ب- هندسية. ج- لا حسابية ولا هندسية.

2. نهاية المتتالية (u_n) هي :

أ- $+\infty$ ب- $-\frac{1}{2}$ ج- $-\infty$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \cdots + e^{n\ln 3}\right]$$

أ- $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ ب- $S_n = \frac{1-3^n}{4}$ ج- $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

التمرين 36 :

α عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1 .

(u_n) متتالية عددية معرفة ب : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha-1}$

1. أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α

ب- اكتب بدلالة n و α ، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α ، عبارة u_n

ج- عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة

2. نضع $\alpha = \frac{3}{2}$

- احسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و

والمجموع $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

التمرين 37 :

(u_n) متتالية معرفة على N كما يلي : $u_0 = 1$ $u_1 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$ و المتتالية (v_n) معرفة على N كمايلي : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1. بين أن : $S_n = u_n - 1$ علما أن : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

2. أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} v_n$

ج- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 1$

و بين أن (u_n) متقاربة .

3. المتتالية (w_n) معرفة على N كما يلي : $w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

أ- بين أن المتتالية (w_n) ثابتة يطلب تعيين قيمتها .

ب- بين مرة ثانية أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 1$

التمرين 38 :

(u_n) متتالية معرفة على N كما يلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$

1. أحسب u_3, u_2, u_1.

2. برهن من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$, ماذا تستنتج.

3.نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة لكل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 2n + 1$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، و استنتج عبارة u_nبدلالة n

ج- احسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ بدلالة n

4 المتتالية العددية.(w_n) المعرفة ب$w_0 = -1$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

حيث $nw_n = (n+1)w_{n-1} + 3$

أ- أحسب w_1, w_2, w_3 و w_4 وما تخمينك حول طبيعة المتتالية .

ب- برهن على طبيعة المتتالية(w_n). ثم احسب w_{2016}.

التمرين 39 :

نعتبر (u_n) المعرفة بالعبارة : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+2} \end{cases}$

1. احسب u_1،u_2،u_3

2. أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$

ب- عين اتجاه تغيير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة ب : $v_n = \frac{u_n+1}{u_n}$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب إيجاد أساسها

ب- عبر عن v_n بدلالة n ثم بين أن : $u_n = \frac{1}{3.2^{n-1}-1}$

ج- احسب نهاية المتتالية (u_n)

التمرين 40 :

(u_n) متتالية معرفة كمايلي $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n{}^2 - 2u_n + 2 \end{cases}$

1.أحسب u_1،u_2

2. اثبت بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n > 1$

3.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة : $v_n = \ln(u_n - 1)$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب إيجاد أساسها و حدها الأول

ب- احسب بدلالة n كلا من v_n و u_n

ج- أوجد أصغرعدد طبيعي n بحيث يكون $u_n > 955$

التمرين 41 :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بالحد الأول u_0 و بالعلاقة $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4}$ حيث $n \in \mathbb{N}$

/1. أ- عين u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة

ب- عندئذ احسب المجموع بدلالة : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

/2. فيما يلي نعتبر : $u_0 = 0$

1. احسب u_1 و u_2 ثم برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -1$

2. ادرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

3. استنتج أن المتتالية العددية متقاربة ثم احسب نهاية (u_n) عندما n يؤول إلى $+\infty$

4. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على N بالعلاقة $v_n = u_n + 1$

أ. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول r

ب.عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم استنتج ، ثانية نهاية المتتالية (u_n)

ج- احسب بدلالة المجموع : $S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

د- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $p_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n(n+1)}$

التمرين 42 :

1. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_0 = 0$ ، $u_1 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$

2. أحسب u_2 ،u_3 وu_4 ثم أنه من أجل كل عدد طبعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$

3. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$، نعتبر المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) اللذين معادلتهما على الترتيب : $y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + 3$

أ - أنشئ المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)ثم مثل الحدود u_0،u_1،u_2، u_3 وu_4

ب - ما هو تخمينك حول تغيرات و تقارب المتتالية (u_n) ؟

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

أ. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب.عبر عن v_n ثم u_n بدلالة nثم استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و عين نهايتها .

التمرين 43 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \in N}$ المعرفة كما يلي : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$ و $u_0 = 1$

1. أ- ارسم في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحني (d) الممثل للدالة f المعرفة على R ب : $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$

ب- باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل الحدود : u_0،u_1،u_2،u_3 و u_4

ج- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

2. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 4$

ب- اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج- هل (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

- عين قيمة α حتي تتكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

4. نضع $\alpha = -4$

أ- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

ب- احسب المجموع $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و π_n الجداء : $\pi_n = v_0 . v_1 \dots . v_n$

التمرين 44 :

(u_n)المتتالية العددية المعرفة على N بحدها الأول $u_0 = 0$ من أجل كل عدد طبيعيn ; $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$.

f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left[-\frac{8}{3}; +\infty\right[$ بـ: $f(x) = \sqrt{6x + 16}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمتجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. والمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$

1)أ. مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1،u_2، u_3

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n < 8$.

ب. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) أ. بين من اجل كل عدد طبيعي n : $8 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(8 - u_n)$.

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $8 - u_n \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 45 :

(u_n)متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0حيث $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد طبيعيn : $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$

1.أ. برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3$.

ب. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على N واستنتج أنها متقاربة.

2 .نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

- برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول .

3. عبربدلالة n عن v_n و u_n واحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4. احسب : $S_n = \frac{1}{u_0-3} + \frac{1}{u_1-3} + \dots + \frac{1}{u_n-3}$ و $T = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \dots + v_n \times u_n$

التمرين 46 :

نعتبرالمتتاليتان(u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي : $u_0 = 1$ و $v_0 = 2$ من اجل كل عدد طبيعي n

$u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)v_n$ و $v_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha v_n$ حيث عدد حقيقي $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

1. لتكن المتتالية (w_n) المعرفة علىN بـ : $w_n = v_n - u_n$.

أ- احسب w_0 و w_1.

ب- برهن أن (w_n) متتالية هندسية وأساسها $(2\alpha - 1)$

ج- عبر عن w_n بدلالة n ثم احسب $lim_{n\to+\infty} w_n$

2 .أ- اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n > u_n$

ب-ادرس اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

ج- بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n)متجاورتان .

3.أ- برهن بالتراجع أن المتتالية (T_n) ثابتة حيث $T_n = u_n + v_n$

ب- استنتج نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

التمرين 47 :

(u_n) متتالية معرفة على N كما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1.أحسب u_1 و u_2 وu_3. ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2.أ- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le n + 3$.

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ج- هل المتتالية (u_n) متقاربة؟.

3.نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على N كما يلي: $v_n = u_n - n$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، و استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

ج- احسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ بدلالة n

4. نعتبر المتتالية $(t_n)_{n\in N}$ المعرفة : $t_n = \ln(v_n)$.

أ- برهن أن المتتالية (t_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب- احسب بدلالة n المجموع حيث : $L_n = t_0 + t_1 + \cdots + t_n$.

ج- استنتج بدلالة n الجداء حيث : $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$. ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} P_n$.

التمرين 48 :

(u_n) متتالية معرفة على N بـ : $u_0 = e$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

1) اثبت بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n > 1$

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3) (v_n) متتالية معرفة على N بـ : $v_n = \ln(u_n)$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، عين أساسها و حدها الأول .

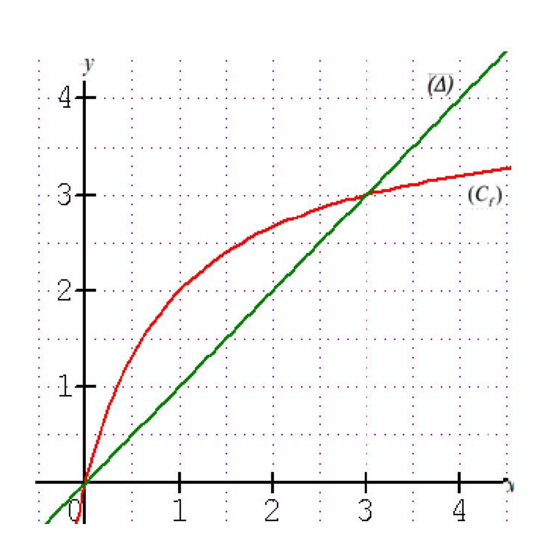
ب- اكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .

4) نضع S_n و T_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ و $T_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$

أ- احسب S_n و T_n بدلالة n.

ب- عين العدد الطبيعي n حتى يكون $T_n = e^{\frac{7}{4}}$

التمرين 49 :



المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I) f الدالة المعرفة على المجال $I = [0;3]$ كمايلي : $f(x) = \frac{4x}{x+1}$

ليكن (C_f) المنحنى الممثل لها f; (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

1- تحقق ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $I = [0;3]$

2- بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I , $f(x)$ ينتمي الى I

II) (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$

من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = f(u_n)$

1 . أ- أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود : u_0، u_1، u_2 و u_3 (لا يطلب حساب الحدود)

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

2 أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 3$

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ثم استنتج أنها متقاربة.

3. لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$

أ. برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الأول v_0.

ب. اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

ج.احسب المجوعين : $G_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 \ldots + v_{n-1}^2$ و $K_n = \frac{3}{u_0} + \frac{3}{u_1} + \frac{3}{u_2} \ldots + \frac{3}{u_{n-1}}$

التمرين 50 :

$(u_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية متناقصة حدها الأول u_0 و أساسها q .

1. عين u_1 و q ثم استنتج الحد الأول u_0 علما أن : $\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = \frac{7}{2} \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = 1 \end{cases}$

2. اكتب u_n بدلالة n .

3 . لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $e^{v_n} = u_n$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب - نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

بين ان : $2. S_n = n(3-n)\ln 2$.

ج- أوجد أصغرعدد طبيعي n بحيث يكون : $S_n + 9\ln 2 \leq 0$

التمرين 51: BAC2016 s

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{2x+8}$

(c) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1.أ. أحسب $lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2. عين احداثيي نقطة تقاطع المنحنى (c) مع المستقيم (Δ) الذي $y=x$ معادلة له .

3. ارسم (c) و (Δ).

II). (u_n) المتتالية العددية المعرفة على بـ : $u_0=0$ من أجل كل عدد طبيعي n. $u_{n+1}=f(u_n)$

أ. مثل في الشكل السابق على محور الفواصل الحدود u_0، u_1،u_2، u_3 (بدون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

2. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

3. أ. برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<4$.

ب. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ج. بين من اجل كل عدد طبيعي n : $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$.

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4-u_n\le\frac{1}{2^n}(4-u_0)$.

د. استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 52: BAC2016 s

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{5x}{x+2}$

1.أ. أحسب $lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)\ge 0$.

II) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N بحدها الأول $u_0=1$ من أجل كـل عدد طبيعي n ; $u_{n+1}=\frac{5u_n}{u_n+2}$.

1. أ. برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 3$.

ب. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). ثم استنتج أنها متقاربة.

2. (v_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $v_n=1-\frac{3}{u_n}$

أ. برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ يطلب حساب حدها الأول v_0.

ب. اكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج. احسب نهاية المتتالية (u_n).

3. أكتب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots+\frac{1}{u_n}$.

التمرين 53: BAC2016 s

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=[0;4]$ كما يلي : $f(x)=\frac{13x}{9x+13}$

1.أ . بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I .

ب. بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I , $f(x)$ ينتمي إلى I

2. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على N بحدها الأول $u_0=4$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ. برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 4$.

ب. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). ثم استنتج أنها متقاربة.

3. بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n\neq 0$.

4. لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $v_n=2+\frac{13}{u_n}$

أ. برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين اساسها و حدها الأول v_0.

ب. اكتب v_n بدلالة n .

ج. استنتج أن : $u_n=\frac{52}{36n+13}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين 54: BAC2016 s

(u_n) متتالية عددية معرفة على N بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

بـ: $u_{n+1}=\frac{2u_n+2}{u_n+3}$ و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$.

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0.

2. أ. عبر بدلالة n عن عبارة الحد العام v_n.

ب. استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

ج. احسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

3.أ. احسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$.

ب. تحقق أن : $\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}(1-v_n)$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n.

ج. استنتج بدلالة n المجموع : $S'_n=\frac{1}{u_0+2}+\frac{1}{u_1+2}+\cdots+\frac{1}{u_n+2}$.

التمرين 55: BAC2017 s

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الأعداد الطبيعية N كما يلي :

$u_0=\frac{1}{4}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ; $u_{n+1}=3-\frac{10}{u_n+4}$ و $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$.

1.أ. برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$.

ب. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2. أ. بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثم عبر عن حدها العام v_n بدلالة n .

ب. اثبت أن: من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 - \frac{3}{v_n+1}$ ثم استنتج النهاية $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 56: BAC2017 s

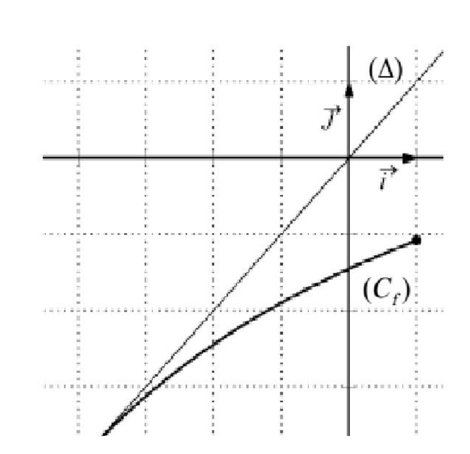
المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

f الدالة المعرفة على المجال $[-4,1]$ كمايلي : $f(x) = \frac{3x-16}{x+11}$

ليكن (C_f) المنحنى الممثل لها f ;(Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

I) تحقق ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-4,1]$

ثم بين أن: من اجل كل $x \in [-4,1]$ فان $f(x) \in [-4,1]$



II) (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ من أجل كل دد طبيعي n

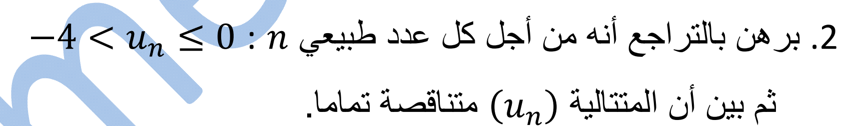
، $u_{n+1} = f(u_n)$

1 . أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود :

u_0،u_1،u_2،u_3 و u_4 (لا يطلب حساب الحدود) ثم ضع تخمينا حول

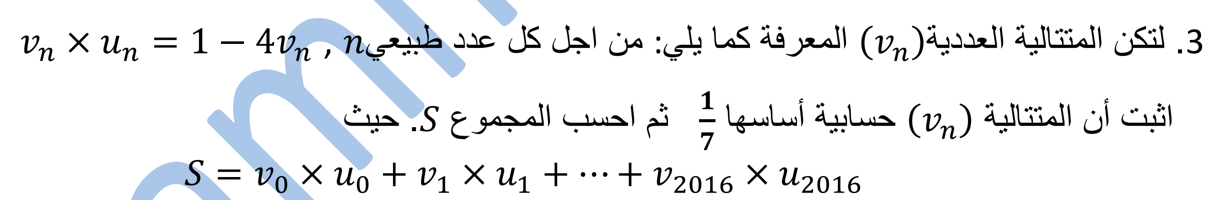
اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-4 < u_n \leq 0$



ثم بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3. لتكن المتتالية العددية(v_n) المعرفة كما يلي: من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n \times u_n = 1 - 4v_n$



اثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{7}$ ثم احسب المجموع S. حيث

$$S = v_0 \times u_0 + v_1 \times u_1 + \cdots + v_{2016} \times u_{2016}$$

التمرين 57: BAC2017 s2

نعتبر المتتاليتان(u_n) و(v_n)المعرفتين على مجموعة الأعداد الطبيعية N كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases}$$

1.احسب الحدين : u_1 و v_1

2.أ. أكتب $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$

ب. باستعمال البرهان بالتراجع برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما والمتتالية(v_n) متناقصة تماما

3. نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على N كما يلي: $w_n = u_n - v_n$

برهن أن المتتالية(w_n)هندسية يطلب تعيين اساسها q وحدها الأول w_0 ثم عبر عن w_n بدلالةn

4.بين أن المتتاليتين (u_n) و(v_n) متجاورتان .

التمرين 58: BAC2017 s2

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0, +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. والمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$

α عدد حقيقي موجب ; (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N بحدها الأول u_0 حيث $u_0 = \alpha$

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

I) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

II) نضع في كل ما يلي $\alpha = 5$

1.أ. أنقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود : u_0، u_1، u_2، u_3 (لا يطلب حساب الحدود)

ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .



2. نعتبر المتتالية (v_n) العددية المعرفة على N كما يلي : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

أ. برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول .

ب. عبر بدلالة n عبارة v_n و u_n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{n+2016}$.

ثم استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث : $S'_n = \frac{1}{u_n+1} + \frac{1}{u_{n+1}+1} + \frac{1}{u_{n+2}+1} + \cdots + \frac{1}{u_{n+2016}+1}$

التمرين 59: BAC2018 s

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n+5}$

1.أ. برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -2$.

ب. بين أن المتتالية (u_n) مناقصة تماما على N واستنتج أنها متقاربة.

2. نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n+2}$

- برهن أن المتتالية (v_n) حسابية اساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .

3. عبربدلالة n عن v_n و u_n واحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4. بين من اجل كل عدد طبيعي n : $u_0 \times v_0 + u_1 \times v_1 + \cdots + u_n \times v_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$

التمرين 60: BAC2018 s

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

1.احسب كلا من u_1 و u_2 و u_3.

2. بين انه اجل كل عدد طبيعي n : $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3. (v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 2n + 1$

أ. برهن بالتراجع انه اجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_n} = v_n$

ب. استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4. احسب المجموعين S_n و T_n حيث :

$$T_n = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + .. + e^{u_{2018}} \text{ و } S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + .. + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$

التمرين 61: BAC2019 s

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 13$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

1. أ. برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.

ب. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة.



2. (v_n) المتتالية العددية المعرفة على N بـ : $v_n = \ln(u_n - 1)$

اثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

3. اكتب v_n بدلالة n ثم بين انه : من اجل كل عدد طبيعي n , $v_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ و احسب عندئذ $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4. بين انه : من اجل كل عدد طبيعي n , $(u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = \left[\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right]^{n+1}$

التمرين 62: BAC2019 s

f الدالة العددية المعرفة على المجال $[4;7[$ بـ : $f(x) = \sqrt{x+2} + 4$

1. أ. بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7[$.

ب. استنتج انه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فان $f(x) \in [4;7[$.

2. برهن انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فان $f(x) - x = \frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$.

ثم استنتج انه : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[4;7[$ فان $f(x) - x > 0$.

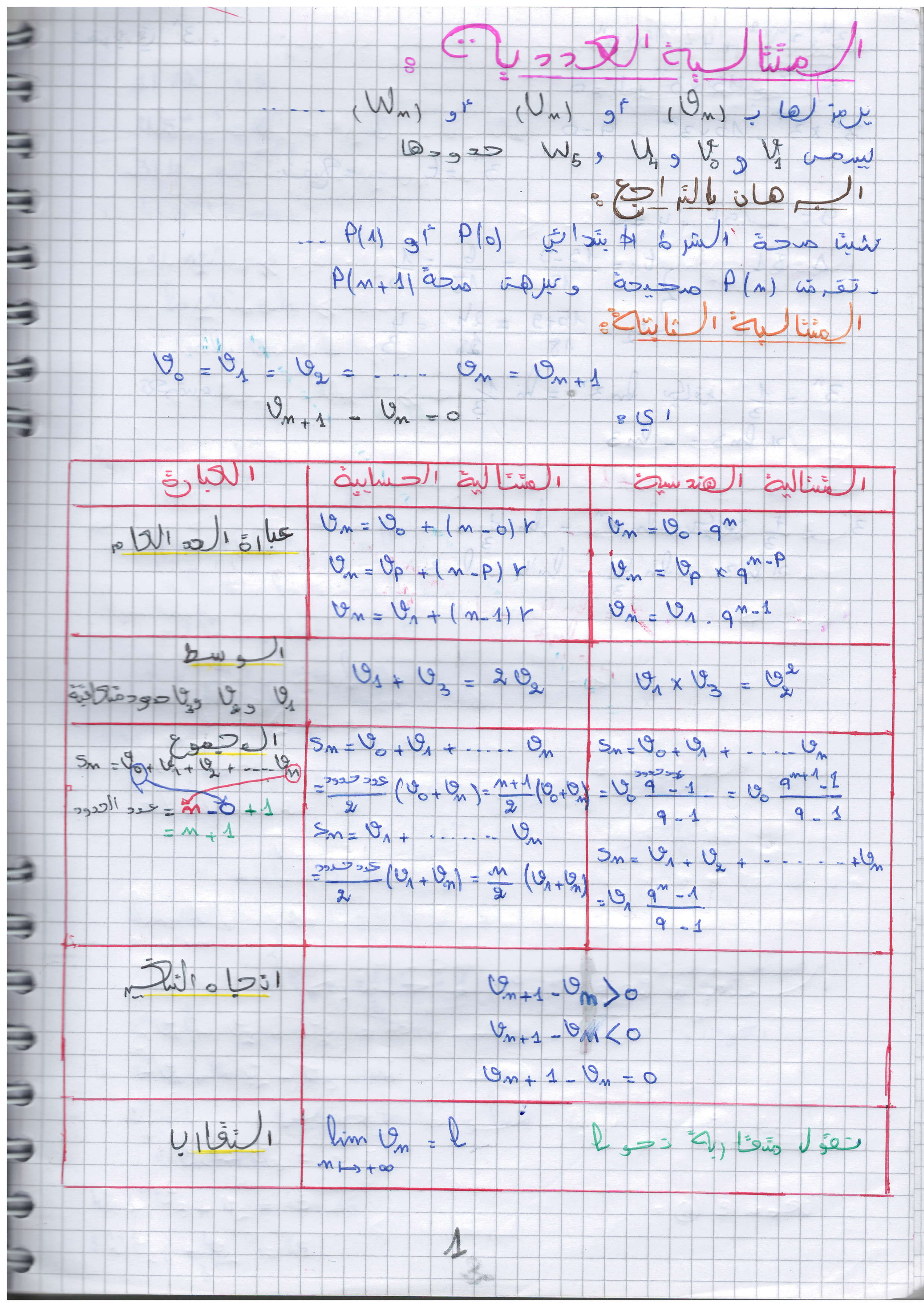
3. (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $f(u_n) = u_{n+1}$

أ. برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $4 \le u_n < 7$.

ب. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين أنها متقاربة.

4. أ. بين من اجل كل عدد طبيعي n : $7 - u_{n+1} < \frac{1}{4}(7 - u_n)$.

ب. استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < 7 - u_n < 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ثم احسب نهاية المتتالية (u_n).



المتتاليات العددية :

يرمز لها ب (v_n) أو (U_n) أو (W_n) ......

يسمى v_1 و v_0 و U_4 و W_5 حدودها

البرهان بالتراجع :

نثبت صحة الشرط الإبتدائي $P(0)$ أو $P(1)$ ...

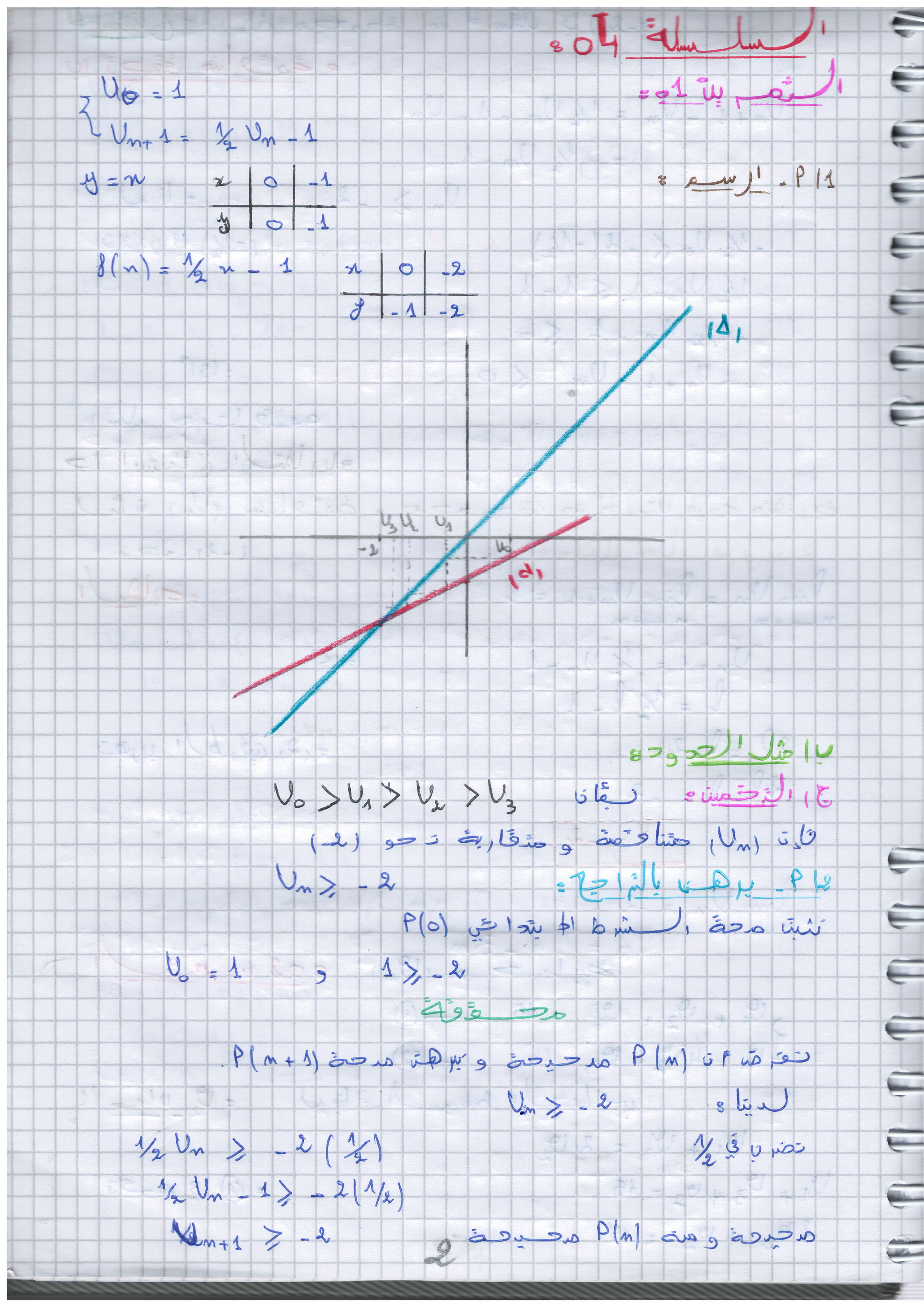
. نفرض $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$

المتتالية الثابتة :

$v_0 = v_1 = v_2 = ... v_n = v_{n+1}$

أي : $v_{n+1} - v_n = 0$

العبارة	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
عبارة الحد العام	$v_n = v_0 + (n-0)r$ $v_n = v_p + (n-p)r$ $v_n = v_1 + (n-1)r$	$v_n = v_0 \cdot q^n$ $v_n = v_p \times q^{n-p}$ $v_n = v_1 \cdot q^{n-1}$
الوسط v_1 و v_2 و v_3 حدود متتابعة	$v_1 + v_3 = 2v_2$	$v_1 \times v_3 = v_2^2$
المجموع $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... v_n$ عدد الحدود $= n - 0 + 1$ $= n + 1$	$S_n = v_0 + v_1 + ... v_n$ $= \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$ $S_n = v_1 + ... v_n$ $= \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(v_1 + v_n) = \frac{n}{2}(v_1 + v_n)$	$S_n = v_0 + v_1 + ... v_n$ $= v_0 \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1} = v_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$ $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$ $= v_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$
اتجاه التغير	$v_{n+1} - v_n > 0$ $v_{n+1} - v_n < 0$ $v_{n+1} - v_n = 0$	
التقارب	$\lim_{n \to +\infty} v_n = l$	نقول متقاربة نحو l



السلسلة 04 :

التمرين 1 :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n - 1 \end{cases}$$

1/أ- الرسم :

$y = x$

x	0	-1
y	0	-1

$f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

x	0	-2
y	-1	-2

ب/ تمثيل الحدود :

ج/ التخمين : نلاحظ أن $U_0 > U_1 > U_2 > U_3$

فإن (U_n) متناقصة و متقاربة نحو (-2)

2/أ- برهان بالتراجع : $U_n \geq -2$

نثبت صحة الشرط الابتدائي $P(0)$

$U_0 = 1$ و $1 \geq -2$

محققة

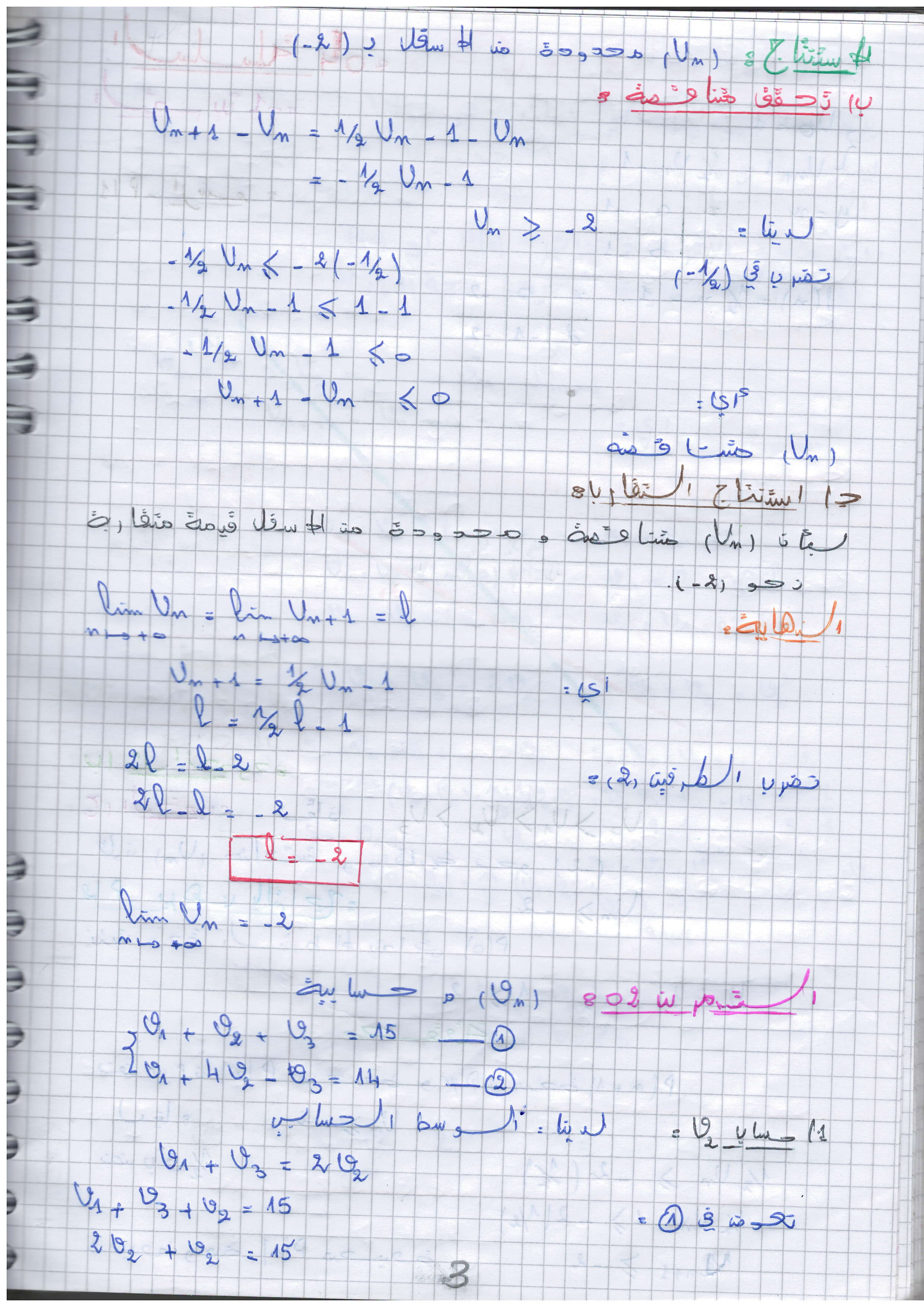
نفرض أن $P(n)$ صحيحة و نبرهن صحة $P(n+1)$.

لدينا : $U_n \geq -2$

نضرب في $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} U_n \geq -2 \left(\frac{1}{2}\right)$

$\frac{1}{2} U_n - 1 \geq -2\left(\frac{1}{2}\right)$

$U_{n+1} \geq -2$ صحيحة ومنه $P(n)$ صحيحة



الاستنتاج: (U_n) محدودة من الأسفل ب (-2)

ب) تحقق متناقصة:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n - 1 - U_n$$
$$= -\frac{1}{2}U_n - 1$$

لدينا: $U_n \geq -2$

نضرب في $(-\frac{1}{2})$

$$-\frac{1}{2}U_n \leq -2(-\frac{1}{2})$$
$$-\frac{1}{2}U_n - 1 \leq 1 - 1$$
$$-\frac{1}{2}U_n - 1 \leq 0$$

أي: $U_{n+1} - U_n \leq 0$

(U_n) متناقصة

ج) استنتاج التقارب:

بما أن (U_n) متناقصة و محدودة من الأسفل قيمة متقاربة نحو (-2).

النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = l$$

أي: $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 1$

$$l = \frac{1}{2}l - 1$$

نضرب الطرفين (2):

$$2l = l - 2$$
$$2l - l = -2$$
$$\boxed{l = -2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = -2$$

التمرين 02: (v_n) حسابية

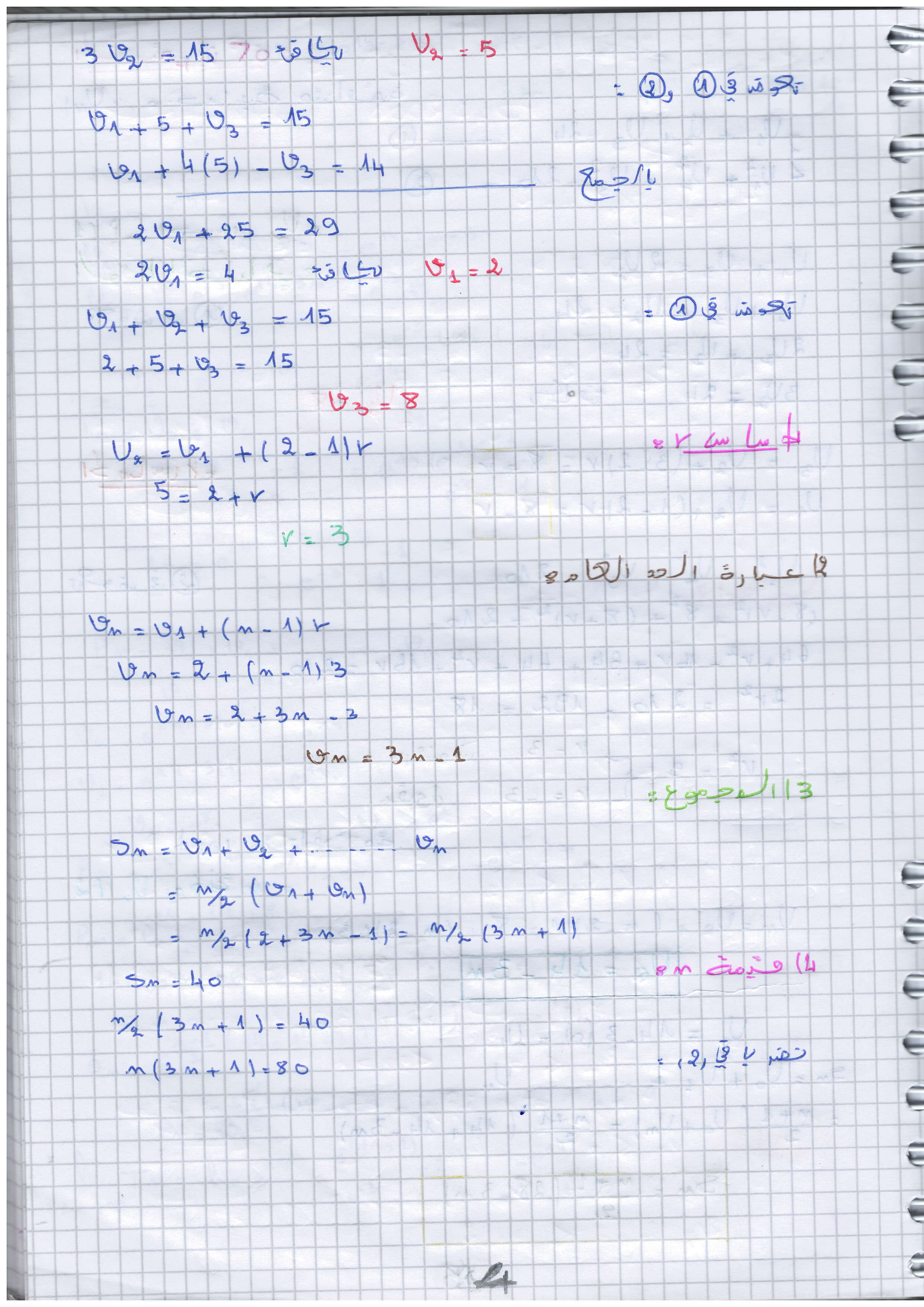
$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 15 & \text{—} (1) \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 14 & \text{—} (2) \end{cases}$$

1.1 **حساب** v_2: لدينا: الوسط الحسابي

$$v_1 + v_3 = 2v_2$$

نعوض في (1):

$$v_1 + v_3 + v_2 = 15$$
$$2v_2 + v_2 = 15$$



$3 v_2 = 15$ ومنه $v_2 = 5$

نعوض في (1) و (2) :

$v_1 + 5 + v_3 = 15$

$v_1 + 4(5) - v_3 = 14$ بالجمع

$2v_1 + 25 = 29$

$2v_1 = 4$ ومنه $v_1 = 2$

نعوض في (1) :

$v_1 + v_2 + v_3 = 15$

$2 + 5 + v_3 = 15$

$v_3 = 8$

الأساس r :

$v_2 = v_1 + (2-1)r$

$5 = 2 + r$

$r = 3$

2) عبارة الحد العام :

$v_n = v_1 + (n-1)r$

$v_n = 2 + (n-1)3$

$v_n = 2 + 3n - 3$

$v_n = 3n - 1$

3) المجموع :

$S_n = v_1 + v_2 + \dots v_n$

$= \frac{n}{2}(v_1 + v_n)$

$= \frac{n}{2}(2 + 3n - 1) = \frac{n}{2}(3n + 1)$

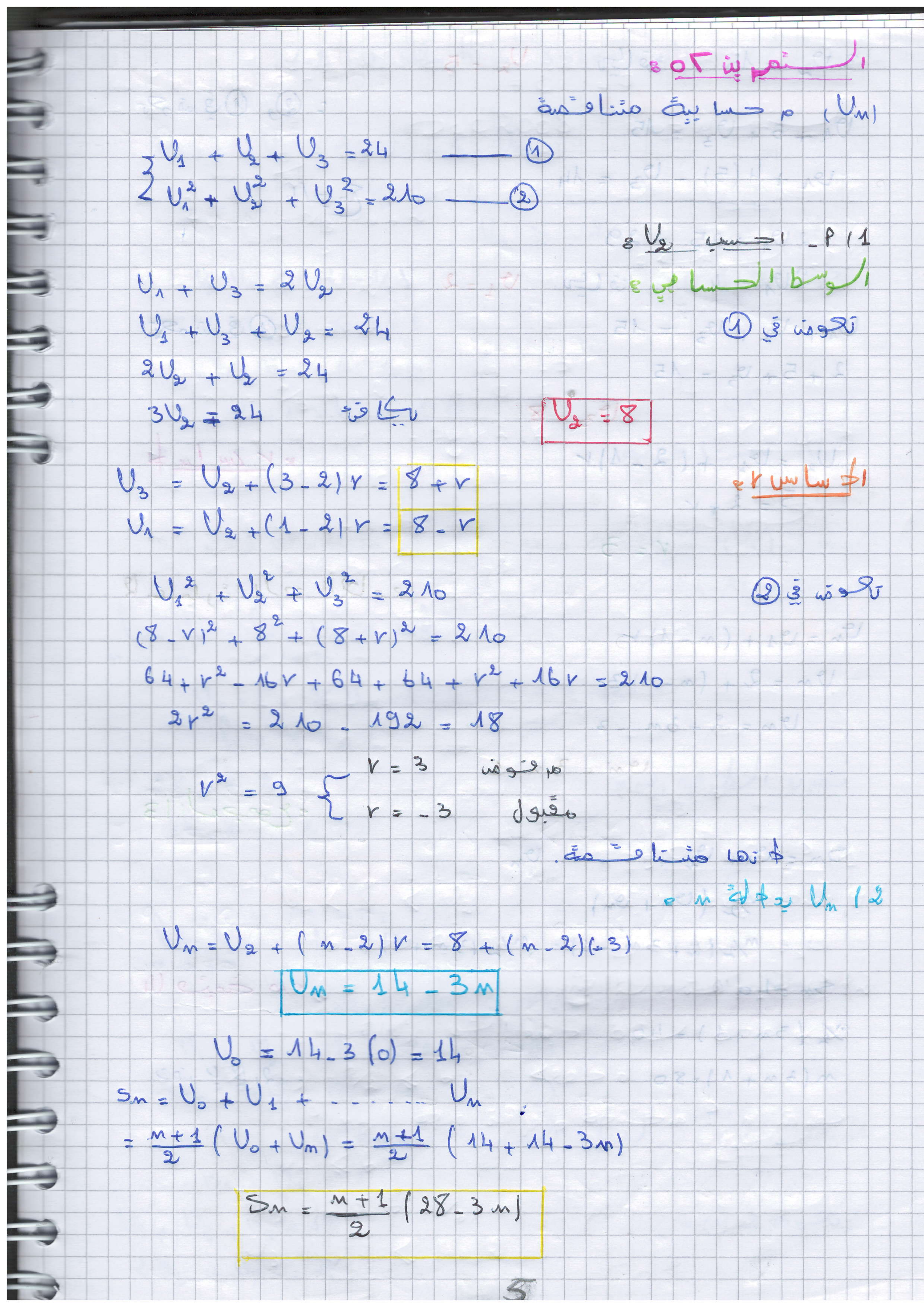
4) قيمة n :

$S_n = 40$

$\frac{n}{2}(3n + 1) = 40$

نضرب في (2) :

$n(3n + 1) = 80$



التمرين 05 :

(U_n) م حسابية متناقصة

$$\begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 = 24 & \text{--- (1)} \\ U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 210 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

1) أ- احسب U_2 :

الوسط الحسابي :

$U_1 + U_3 = 2U_2$

تعويض في (1)

$U_1 + U_3 + U_2 = 24$

$2U_2 + U_2 = 24$

$3U_2 = 24$ ومنه $\boxed{U_2 = 8}$

الأساس r :

$U_3 = U_2 + (3-2)r = \boxed{8 + r}$

$U_1 = U_2 + (1-2)r = \boxed{8 - r}$

تعويض في (2)

$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 210$

$(8-r)^2 + 8^2 + (8+r)^2 = 210$

$64 + r^2 - 16r + 64 + 64 + r^2 + 16r = 210$

$2r^2 = 210 - 192 = 18$

$r^2 = 9 \begin{cases} r = 3 & \text{مرفوض} \\ r = -3 & \text{مقبول} \end{cases}$

لأنها متناقصة.

2) U_n بدلالة n :

$U_n = U_2 + (n-2)r = 8 + (n-2)(-3)$

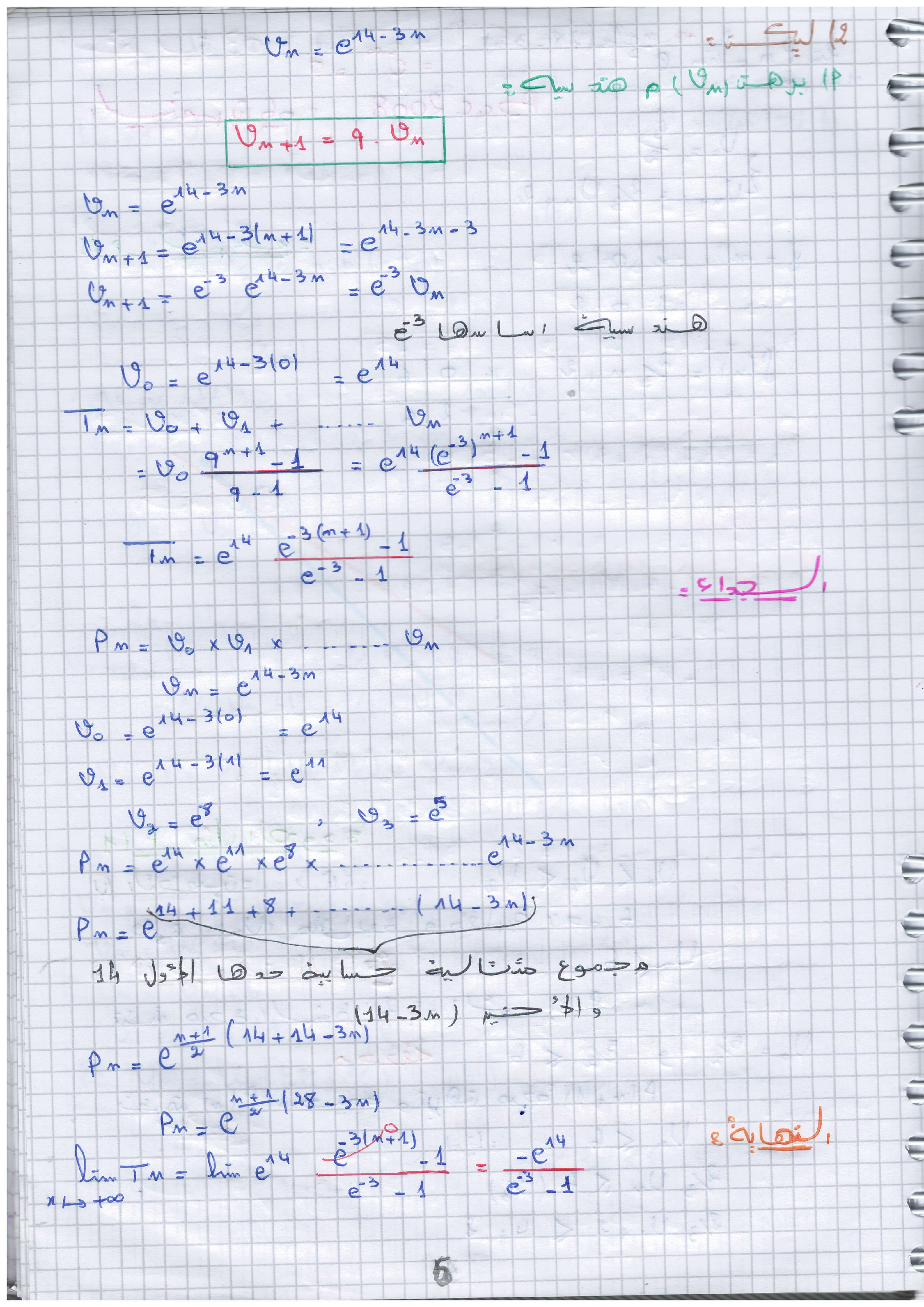
$\boxed{U_n = 14 - 3n}$

$U_0 = 14 - 3(0) = 14$

$S_n = U_0 + U_1 + \dots\dots U_n$

$= \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n) = \frac{n+1}{2}(14 + 14 - 3n)$

$$\boxed{S_n = \frac{n+1}{2}(28 - 3n)}$$



2) ليكن :

$$v_n = e^{14-3n}$$

1) برهن أن (v_n) م هندسية :

$$\boxed{v_{n+1} = q \cdot v_n}$$

$v_n = e^{14-3n}$

$v_{n+1} = e^{14-3(n+1)} = e^{14-3n-3}$

$v_{n+1} = e^{-3}\, e^{14-3n} = e^{-3}\, v_n$

هندسية أساسها e^{-3}

$v_0 = e^{14-3(0)} = e^{14}$

$T_n = v_0 + v_1 + \dots\dots v_n$

$= v_0 \dfrac{q^{n+1} - 1}{q-1} = e^{14} \dfrac{(e^{-3})^{n+1} - 1}{e^{-3} - 1}$

$T_n = e^{14} \dfrac{e^{-3(n+1)} - 1}{e^{-3} - 1}$

الجداء :

$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots\dots v_n$

$v_n = e^{14-3n}$

$v_0 = e^{14-3(0)} = e^{14}$

$v_1 = e^{14-3(1)} = e^{11}$

$v_2 = e^{8}$, $v_3 = e^{5}$

$P_n = e^{14} \times e^{11} \times e^{8} \times \dots\dots\dots e^{14-3n}$

$P_n = e^{14+11+8+\dots\dots(14-3n)}$

مجموع متتالية حسابية حدها الأول 14

والأخير $(14-3n)$

$P_n = e^{\frac{n+1}{2}(14+14-3n)}$

$P_n = e^{\frac{n+1}{2}(28-3n)}$

النهاية :

$\lim_{x \to +\infty} T_n = \lim e^{14} \dfrac{e^{-3(n+1)} - 1}{e^{-3} - 1} = \dfrac{-e^{14}}{e^{-3} - 1}$

$$\lim_{x \to +\infty} P_n = \lim e^{\frac{n+1}{2}}(28-3n) = e^{-\infty} = 0$$

التمرين 06 : Bac 2008

$$\begin{cases} U_0 = \frac{5}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2}{3} U_n + 2 \end{cases}$$

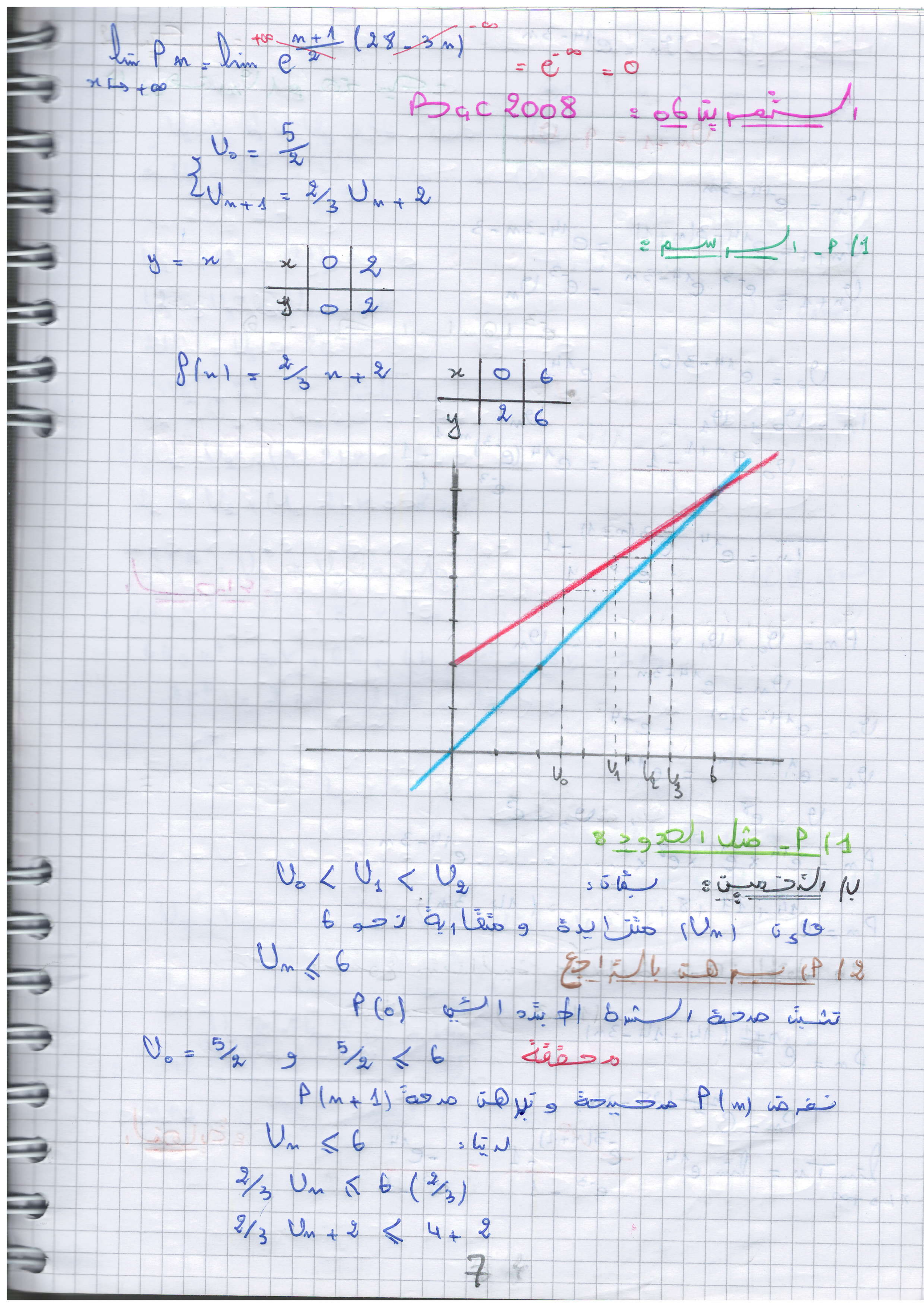
1/ أ - الرسم :

$y = x$

x	0	2
y	0	2

$f(x) = \frac{2}{3} x + 2$

x	0	6
y	2	6



1/ أ - مثل الحدود :

ب/ التخمين : نلاحظ : $U_0 < U_1 < U_2$

فإن (U_n) متزايدة و متقاربة نحو 6

2/ أ) برهنة بالتراجع : $U_n \leq 6$

نثبت صحة الشرط ابتداء الشيء $P(0)$

$U_0 = 5/2$ و $5/2 \leq 6$ محققة

نفرض $P(n)$ صحيحة و نبرهن صحة $P(n+1)$

لدينا : $U_n \leq 6$

$\frac{2}{3} U_n \leq 6 \left(\frac{2}{3}\right)$

$\frac{2}{3} U_n + 2 \leq 4 + 2$

$U_{n+1} < 6$

محققة ومنه $P(n)$ محققة

ب) تحقق متزايدة:

$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3} U_n + 2 - U_n$

$= -\frac{1}{3} U_n + 2$

لدينا: $U_n < 6$

$-\frac{1}{3} U_n \geq 6 \left(-\frac{1}{3}\right)$

$-\frac{1}{3} U_n + 2 \geq -2 + 2$

$-\frac{1}{3} U_n + 2 \geq 0$

$U_{n+1} - U_n \geq 0$ متزايدة

ج) هل متقاربة: نعم متقاربة لأنها متزايدة ومحدودة من الأعلى قيمة متقاربة نحو 6.

3) ليكن:

$V_n = U_n - 6$

أ) برهن (V_n) م هندسية:

$V_n = U_n - 6$

$V_{n+1} = U_{n+1} - 6 = \frac{2}{3} U_n + 2 - 6$

$= \frac{2}{3} U_n - 4 = \frac{2}{3} \left[U_n - \frac{4}{\frac{2}{3}} \right]$

$V_{n+1} = \frac{2}{3} [U_n - 6] = \frac{2}{3} V_n$

هندسية اساسها $\frac{2}{3}$

$V_0 = U_0 - 6 = \frac{5}{2} - 6 = -\frac{7}{2}$

ب) V_n بدلالة n:

$V_n = V_0 q^{n-0} = -\frac{7}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

U_n بدلالة n

$V_n = U_n - 6$

$U_n = V_n + 6$

$U_n = -\frac{7}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$

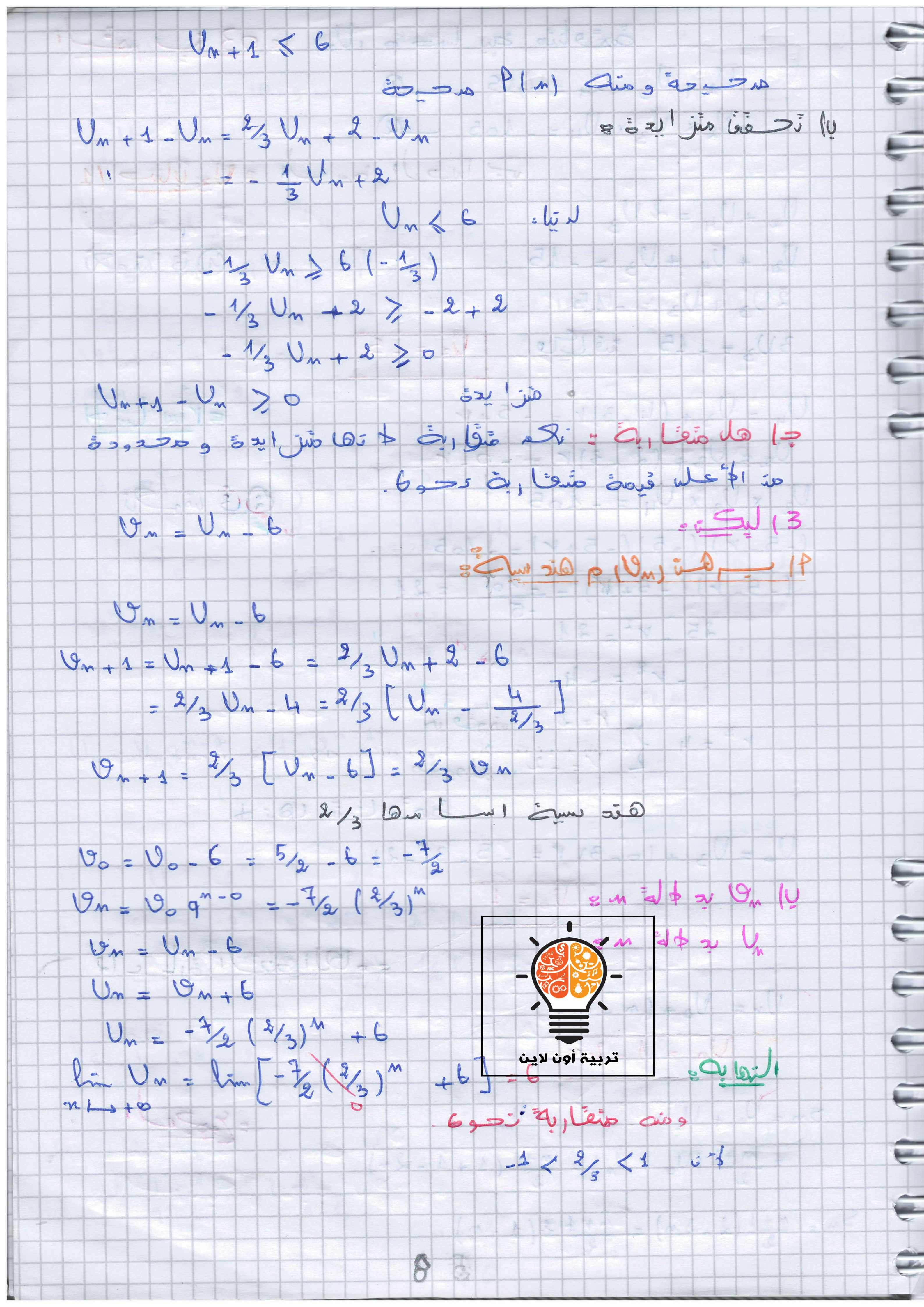
النهاية:

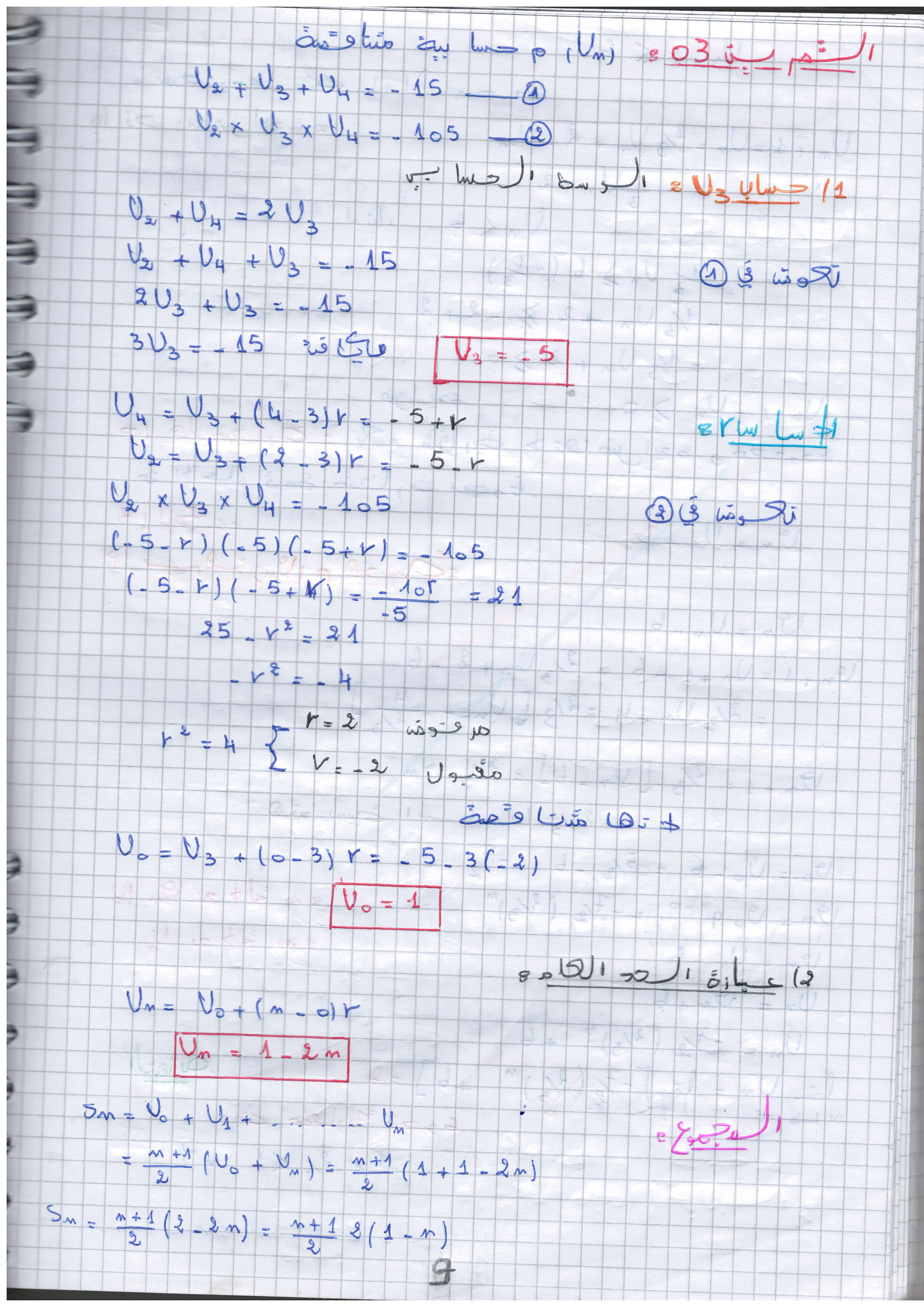
$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim \left[-\frac{7}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6 \right] = 6$

(حيث $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$)

ومنه متقاربة نحو 6

لأن $-1 < \frac{2}{3} < 1$





التمرين 03 : (U_n) م حسابية متناقصة

$$U_2 + U_3 + U_4 = -15 \quad \text{——} (1)$$

$$U_2 \times U_3 \times U_4 = -105 \quad \text{——} (2)$$

1/ حساب U_3 : الوسط الحسابي

$$U_2 + U_4 = 2U_3$$

نعوض في (1)

$$U_2 + U_4 + U_3 = -15$$

$$2U_3 + U_3 = -15$$

$3U_3 = -15$ ومنه

$$\boxed{U_3 = -5}$$

الأساس r :

$$U_4 = U_3 + (4-3)r = -5 + r$$

$$U_2 = U_3 + (2-3)r = -5 - r$$

نعوض في (2)

$$U_2 \times U_3 \times U_4 = -105$$

$$(-5-r)(-5)(-5+r) = -105$$

$$(-5-r)(-5+r) = \frac{-105}{-5} = 21$$

$$25 - r^2 = 21$$

$$-r^2 = -4$$

$$r^2 = 4 \begin{cases} r = 2 & \text{مرفوض} \\ r = -2 & \text{مقبول} \end{cases}$$

لأنها متناقصة

$$U_0 = U_3 + (0-3)r = -5 - 3(-2)$$

$$\boxed{U_0 = 1}$$

2/ عبارة الحد العام :

$$U_n = U_0 + (n-0)r$$

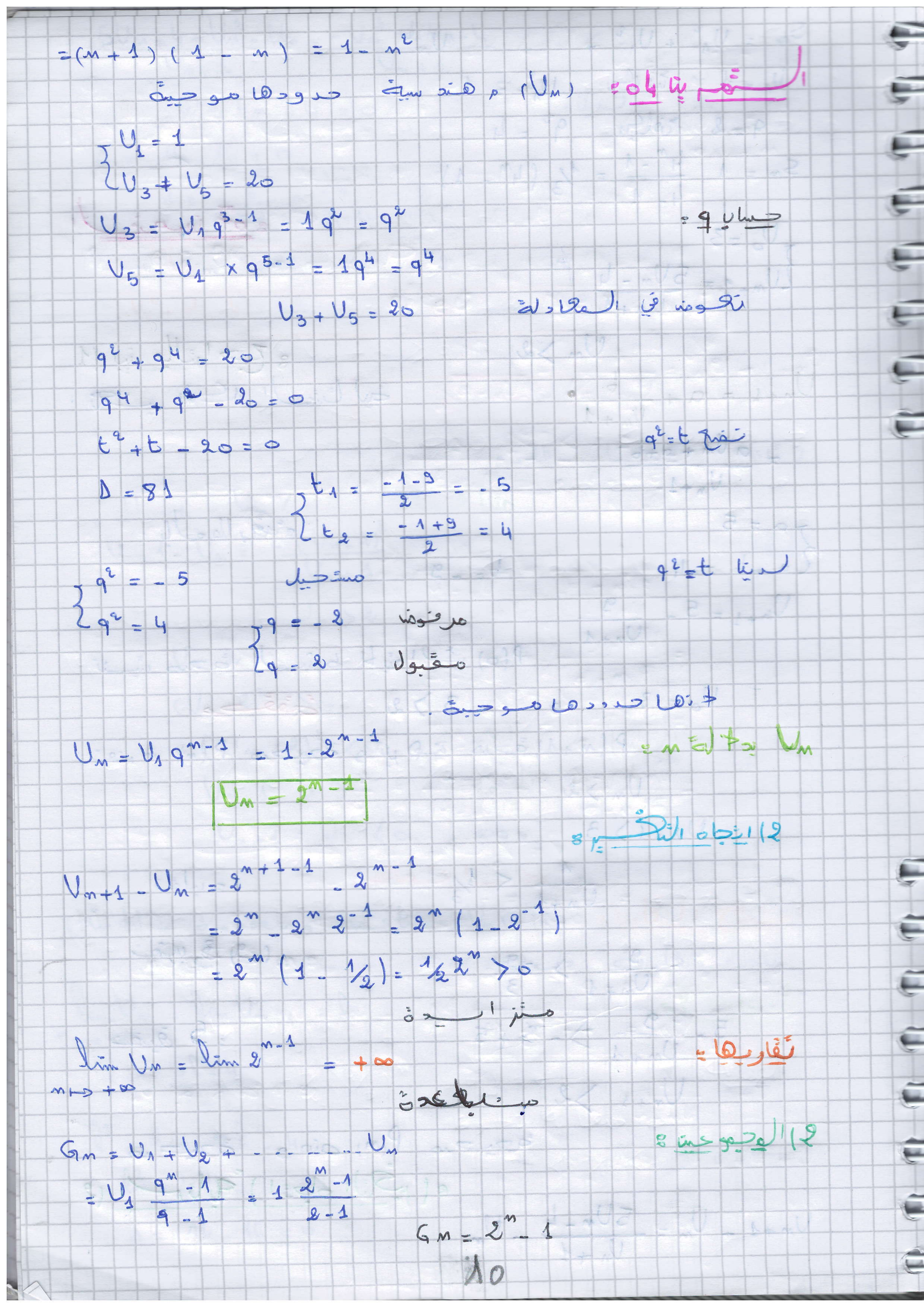
$$\boxed{U_n = 1 - 2n}$$

المجموع :

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots\dots U_n$$

$$= \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n) = \frac{n+1}{2}(1 + 1 - 2n)$$

$$S_n = \frac{n+1}{2}(2 - 2n) = \frac{n+1}{2}\, 2(1-n)$$



$= (n+1)(1-n) = 1 - n^2$

التمرين ثامن : (U_n) م هندسية حدودها موجبة

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_3 + U_5 = 20 \end{cases}$$

حساب q :

$U_3 = U_1 q^{3-1} = 1 q^2 = q^2$

$U_5 = U_1 \times q^{5-1} = 1 q^4 = q^4$

نعوض في المعادلة $U_3 + U_5 = 20$

$q^2 + q^4 = 20$

$q^4 + q^2 - 20 = 0$

نضع $q^2 = t$

$t^2 + t - 20 = 0$

$\Delta = 81$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{-1-9}{2} = -5 \\ t_2 = \frac{-1+9}{2} = 4 \end{cases}$$

لدينا $q^2 = t$

$$\begin{cases} q^2 = -5 & \text{مستحيل} \\ q^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = -2 & \text{مرفوض} \\ q = 2 & \text{مقبول} \end{cases}$$

لأنها حدودها موجبة.

U_n بدلالة n :

$U_n = U_1 q^{n-1} = 1 \cdot 2^{n-1}$

$$\boxed{U_n = 2^{n-1}}$$

2) اتجاه التغير :

$U_{n+1} - U_n = 2^{n+1-1} - 2^{n-1}$

$= 2^n - 2^n 2^{-1} = 2^n (1 - 2^{-1})$

$= 2^n (1 - 1/2) = 1/2 \, 2^n > 0$

متزايدة

تقاربها :

$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim 2^{n-1} = +\infty$

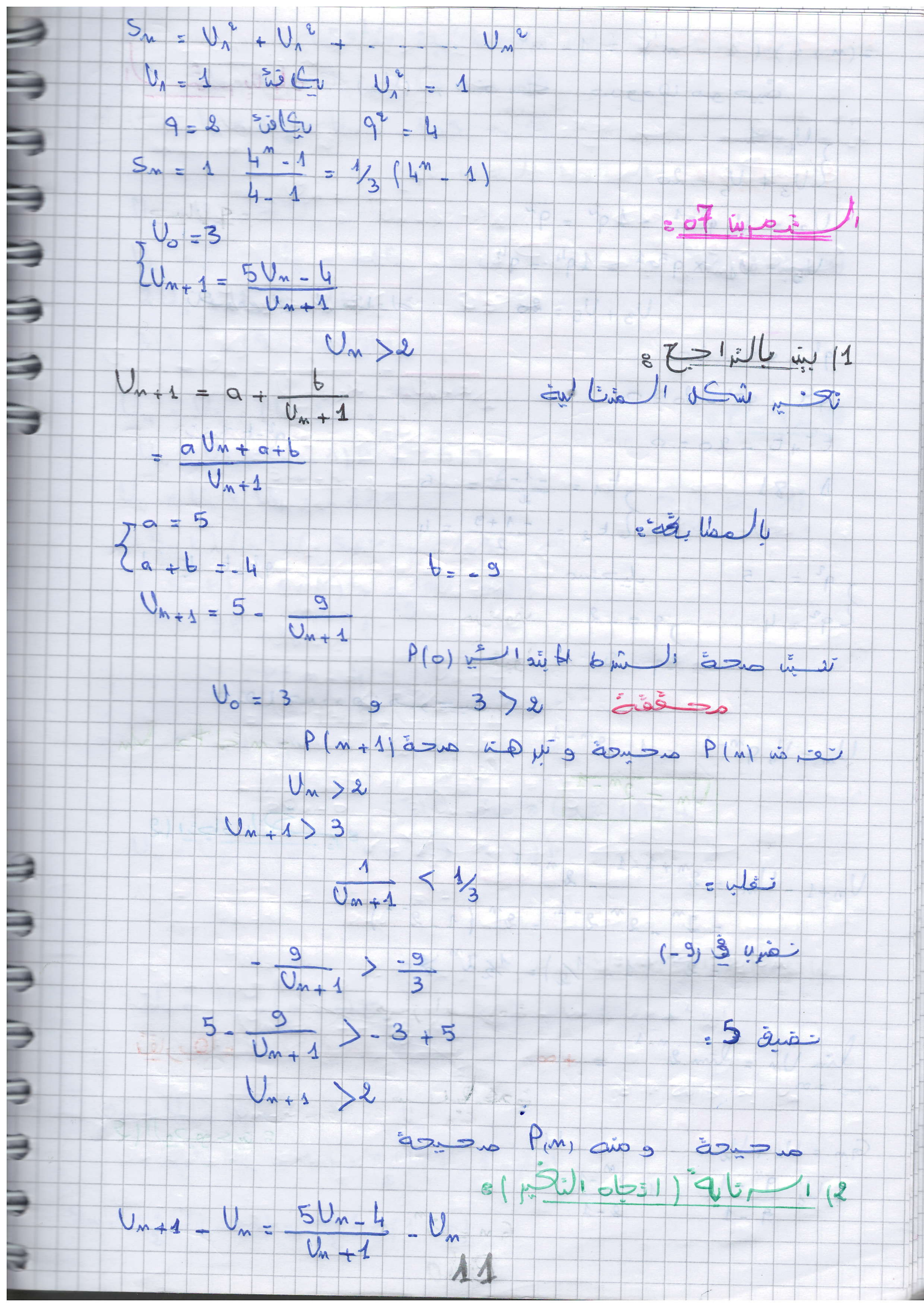
متباعدة

3) المجموع :

$G_n = U_1 + U_2 + \ldots U_n$

$= U_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \frac{2^n - 1}{2 - 1}$

$G_n = 2^n - 1$



$S_n = U_1^2 + U_1^2 + \ldots U_n^2$

$U_1 = 1$ يكافئ $U_1^2 = 1$

$q = 2$ يكافئ $q^2 = 4$

$S_n = 1 \dfrac{4^n - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

التمرين 07 :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n - 4}{U_n + 1} \end{cases}$$

1) بين بالتراجع : $U_n > 2$

نغير شكل المتتالية

$U_{n+1} = a + \dfrac{b}{U_n + 1}$

$= \dfrac{aU_n + a + b}{U_n + 1}$

بالمطابقة :

$$\begin{cases} a = 5 \\ a + b = -4 \end{cases} \qquad b = -9$$

$U_{n+1} = 5 - \dfrac{9}{U_n + 1}$

نثبت صحة الشرط الابتدائي $P(0)$

$U_0 = 3$ و $3 > 2$ محققة

نفترض $P(n)$ صحيحة و نبرهن صحة $P(n+1)$

$U_n > 2$

$U_n + 1 > 3$

نقلب : $\dfrac{1}{U_n + 1} < \frac{1}{3}$

نضرب في (-9) : $-\dfrac{9}{U_n + 1} > \dfrac{-9}{3}$

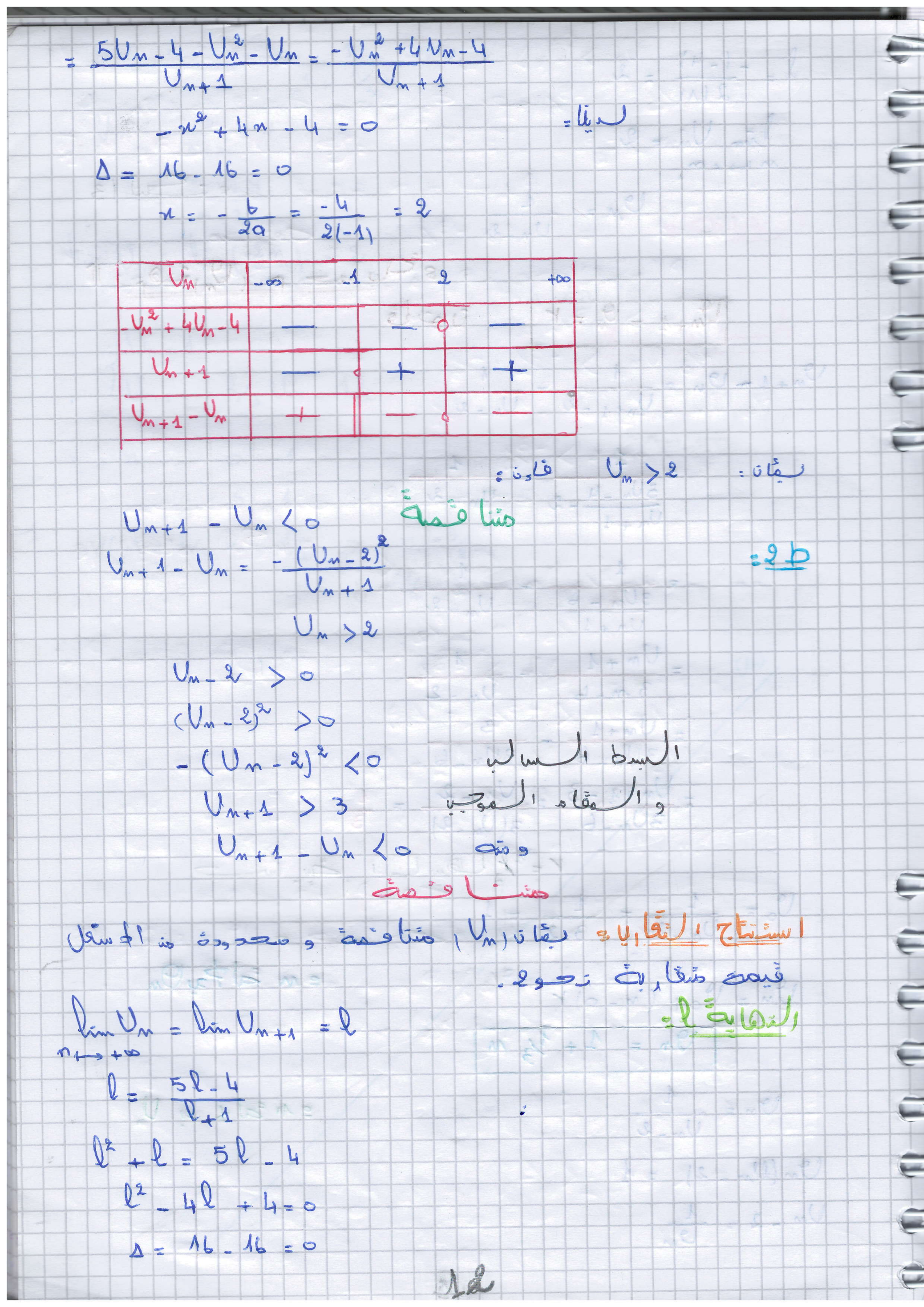
نضيف 5 : $5 - \dfrac{9}{U_n + 1} > -3 + 5$

$U_{n+1} > 2$

صحيحة و منه $P(n)$ صحيحة

2) الرتابة (اتجاه التغير) :

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{5U_n - 4}{U_n + 1} - U_n$



$= \frac{5U_n - 4 - U_n^2 - U_n}{U_n + 1} = \frac{-U_n^2 + 4U_n - 4}{U_n + 1}$

لدينا:

$-x^2 + 4x - 4 = 0$

$\Delta = 16 - 16 = 0$

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$

U_n	$-\infty$ … -1	-1 … 2	2 … $+\infty$
$-U_n^2 + 4U_n - 4$	$-$	$-$ 0	$-$
$U_n + 1$	$-$ 0	$+$	$+$
$U_{n+1} - U_n$	$+$	$-$ 0	$-$

بما أن: $U_n > 2$ فإن:

$U_{n+1} - U_n < 0$ متناقصة

ط2:

$U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n - 2)^2}{U_n + 1}$

$U_n > 2$

$U_n - 2 > 0$

$(U_n - 2)^2 > 0$

$-(U_n - 2)^2 < 0$ البسط السالب

$U_n + 1 > 3$ والمقام الموجب

ومنه $U_{n+1} - U_n < 0$

متناقصة

استنتاج التقارب: بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو 2.

النهاية l:

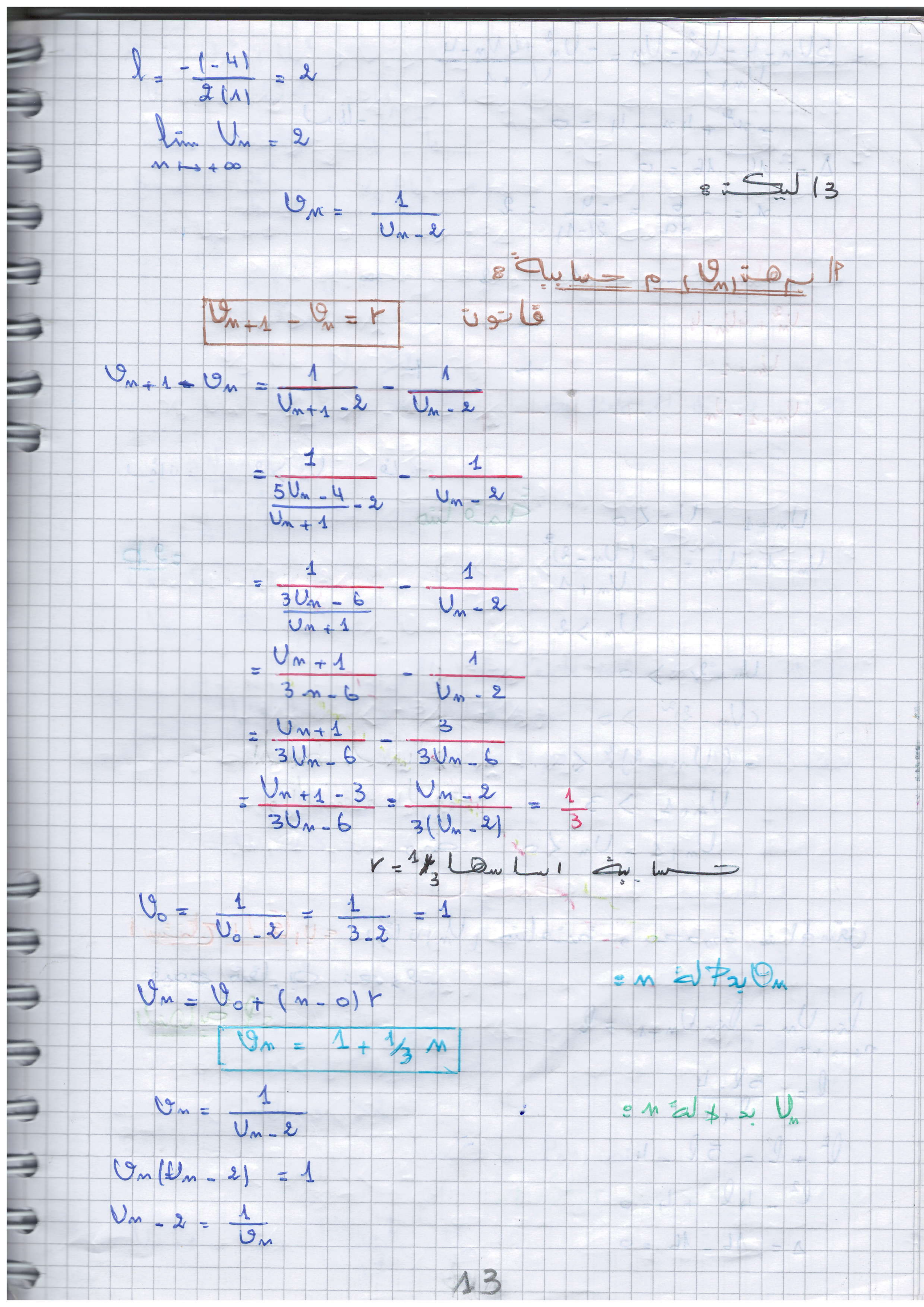
$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim U_{n+1} = l$

$l = \frac{5l - 4}{l + 1}$

$l^2 + l = 5l - 4$

$l^2 - 4l + 4 = 0$

$\Delta = 16 - 16 = 0$



$$l = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 2$$

13 لتكن:

$$v_n = \frac{1}{U_n - 2}$$

1) برهن أن v_n متتالية حسابية:

قانون $\boxed{v_{n+1} - v_n = r}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{U_{n+1} - 2} - \frac{1}{U_n - 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{5U_n - 4}{U_n + 1} - 2} - \frac{1}{U_n - 2}$$

$$= \frac{1}{\frac{3U_n - 6}{U_n + 1}} - \frac{1}{U_n - 2}$$

$$= \frac{U_n + 1}{3U_n - 6} - \frac{1}{U_n - 2}$$

$$= \frac{U_n + 1}{3U_n - 6} - \frac{3}{3U_n - 6}$$

$$= \frac{U_n + 1 - 3}{3U_n - 6} = \frac{U_n - 2}{3(U_n - 2)} = \frac{1}{3}$$

حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$

$$v_0 = \frac{1}{U_0 - 2} = \frac{1}{3 - 2} = 1$$

v_n بدلالة n:

$$v_n = v_0 + (n - 0) r$$

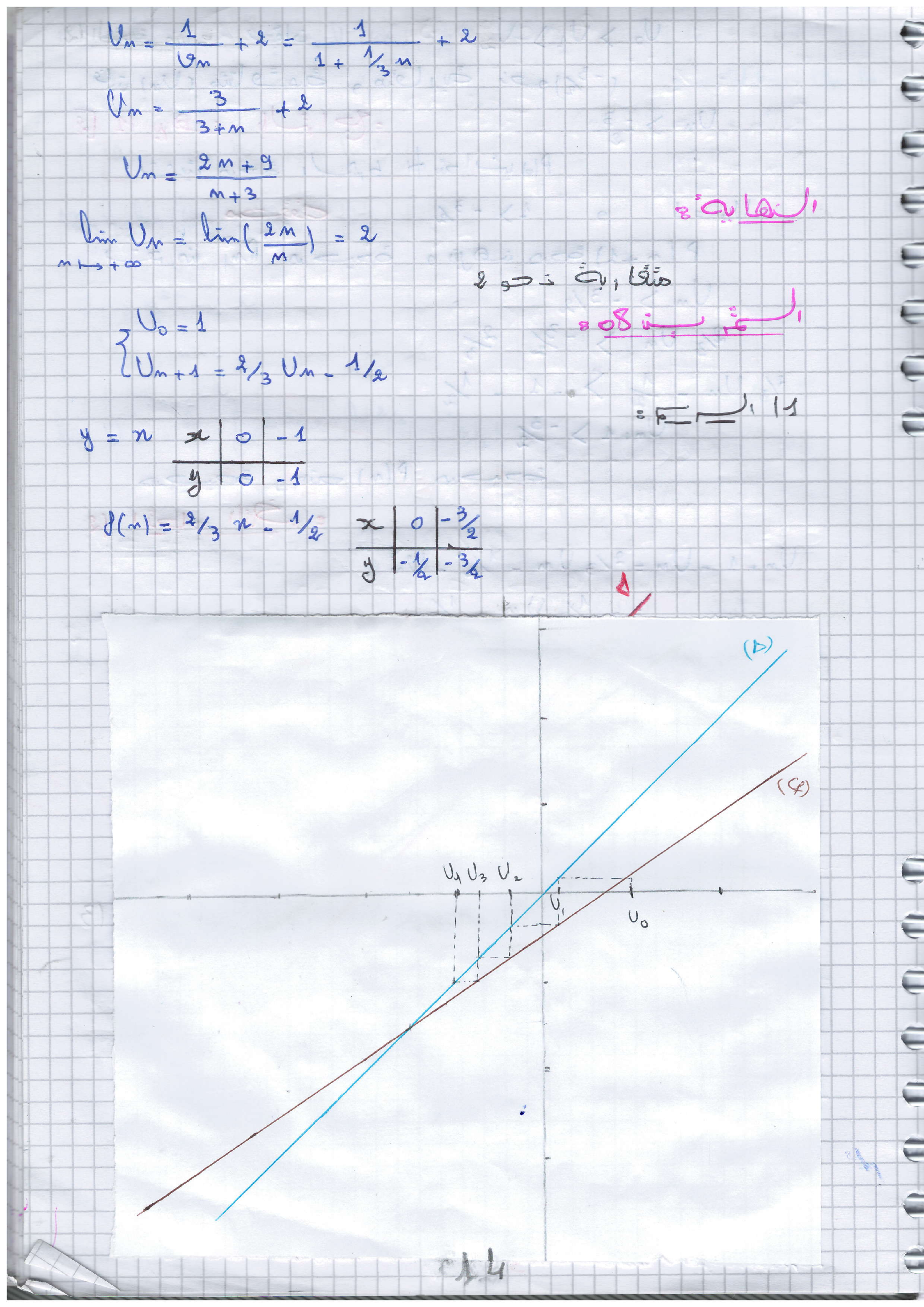
$$\boxed{v_n = 1 + \frac{1}{3} n}$$

U_n بدلالة n:

$$v_n = \frac{1}{U_n - 2}$$

$$v_n (U_n - 2) = 1$$

$$U_n - 2 = \frac{1}{v_n}$$



$$U_n = \frac{1}{v_n} + 2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}n} + 2$$

$$U_n = \frac{3}{3+n} + 2$$

$$U_n = \frac{2n+9}{n+3}$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim\left(\frac{2n}{n}\right) = 2$$

النهاية:

متقاربة نحو 2

التمرين 08:

1/ الرسم:

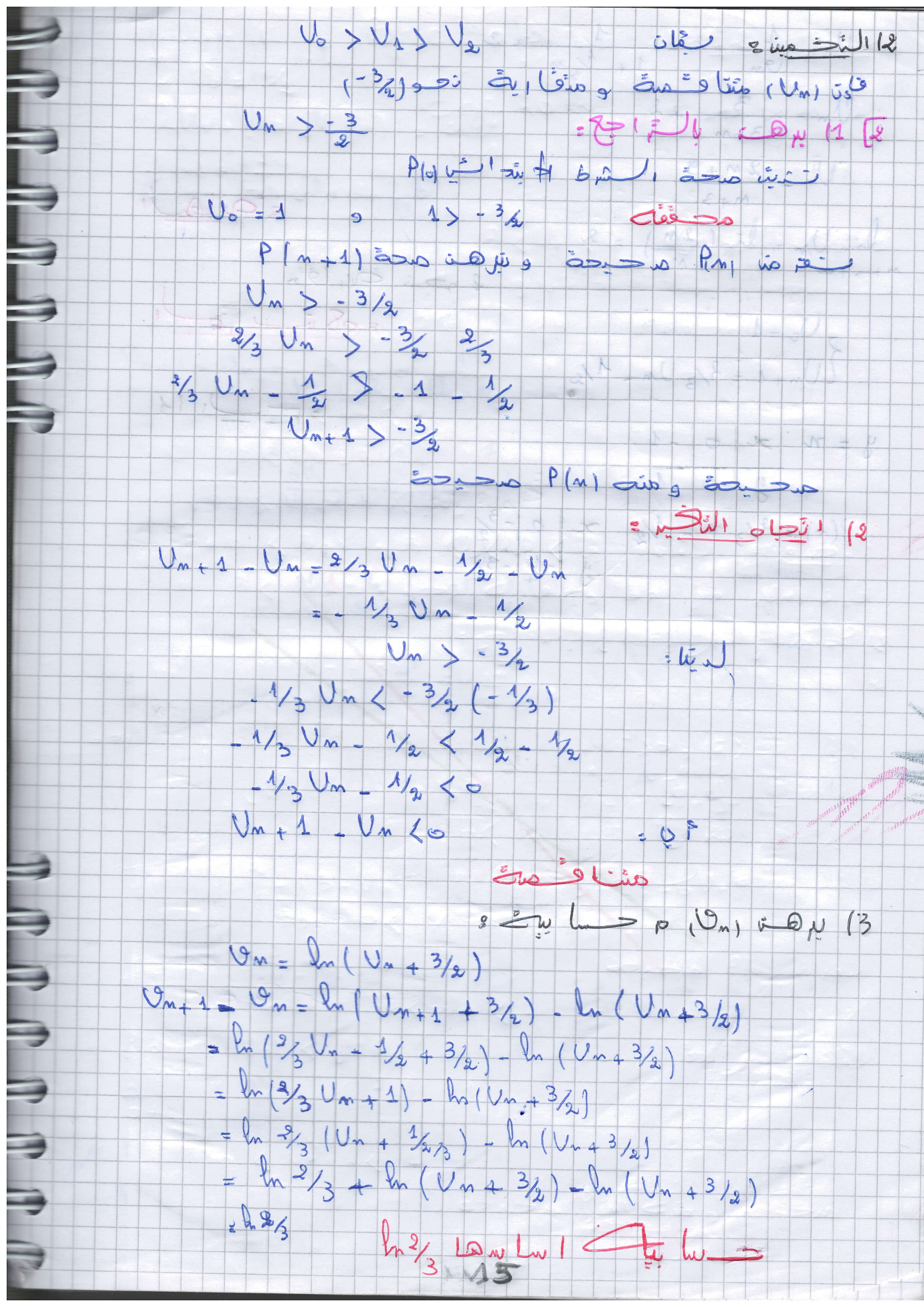
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3} U_n - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$y = x$

x	0	-1
y	0	-1

$f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

x	0	$-\frac{3}{2}$
y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$



2) التخمين: بيان $U_0 > U_1 > U_2$

فإن (U_n) متناقصة و متقاربة نحو $(-3/2)$

2] 1) برهن بالتراجع: $U_n > -\frac{3}{2}$

نثبت صحة الشرط الابتدائي $P(0)$

محققة $U_0 = 1$ و $1 > -3/2$

نفترض أن $P(n)$ صحيحة و نبرهن صحة $P(n+1)$

$U_n > -3/2$

$\frac{2}{3} U_n > -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} U_n - \frac{1}{2} > -1 - \frac{1}{2}$

$U_{n+1} > -\frac{3}{2}$

صحيحة ومنه $P(n)$ صحيحة

2) اتجاه التغير:

$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3} U_n - \frac{1}{2} - U_n$

$= -\frac{1}{3} U_n - \frac{1}{2}$

لدينا: $U_n > -\frac{3}{2}$

$-\frac{1}{3} U_n < -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)$

$-\frac{1}{3} U_n - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{3} U_n - \frac{1}{2} < 0$

أي: $U_{n+1} - U_n < 0$

متناقصة

3) نبرهن (v_n) م حسابية:

$v_n = \ln\left(U_n + \frac{3}{2}\right)$

$v_{n+1} - v_n = \ln\left(U_{n+1} + \frac{3}{2}\right) - \ln\left(U_n + \frac{3}{2}\right)$

$= \ln\left(\frac{2}{3} U_n - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) - \ln\left(U_n + \frac{3}{2}\right)$

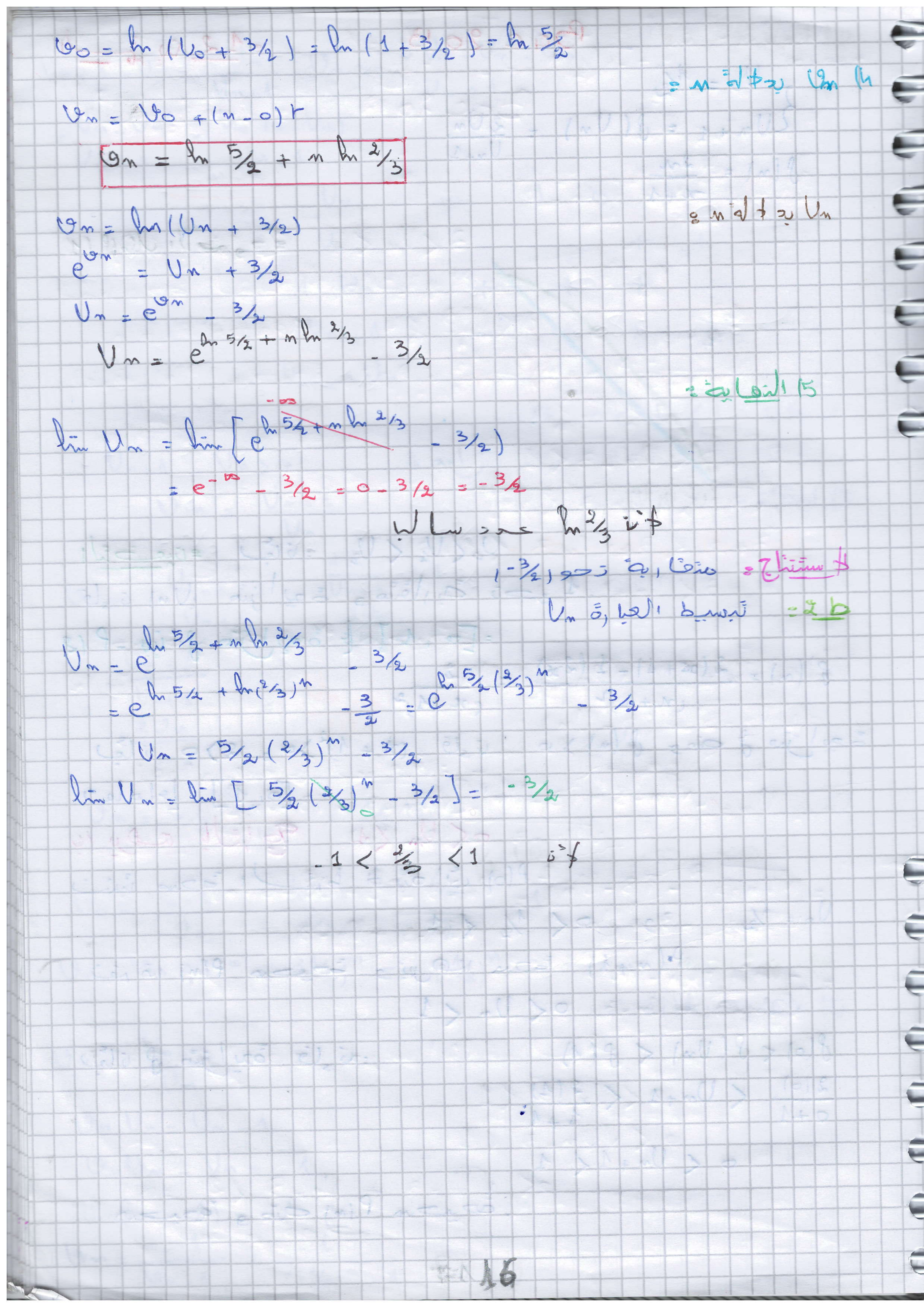
$= \ln\left(\frac{2}{3} U_n + 1\right) - \ln\left(U_n + \frac{3}{2}\right)$

$= \ln \frac{2}{3}\left(U_n + \frac{1}{2/3}\right) - \ln\left(U_n + \frac{3}{2}\right)$

$= \ln \frac{2}{3} + \ln\left(U_n + \frac{3}{2}\right) - \ln\left(U_n + \frac{3}{2}\right)$

$= \ln \frac{2}{3}$

حسابية أساسها $\ln\frac{2}{3}$



ب) v_n بدلالة n :

$v_0 = \ln(U_0 + 3/2) = \ln(1 + 3/2) = \ln \frac{5}{2}$

$v_n = v_0 + (n-0)r$

$$\boxed{v_n = \ln \frac{5}{2} + n \ln \frac{2}{3}}$$

U_n بدلالة n :

$v_n = \ln(U_n + 3/2)$

$e^{v_n} = U_n + 3/2$

$U_n = e^{v_n} - 3/2$

$U_n = e^{\ln 5/2 + n \ln 2/3} - 3/2$

5) النهاية :

$\lim U_n = \lim \left[e^{\ln 5/2 + n \ln 2/3} - 3/2 \right)$ ($\ln 5/2 + n \ln 2/3 \to -\infty$)

$= e^{-\infty} - 3/2 = 0 - 3/2 = -3/2$

لأن $\ln 2/3$ عدد سالب

الاستنتاج : متقاربة نحو $-3/2$

ط2 : تبسيط العبارة U_n

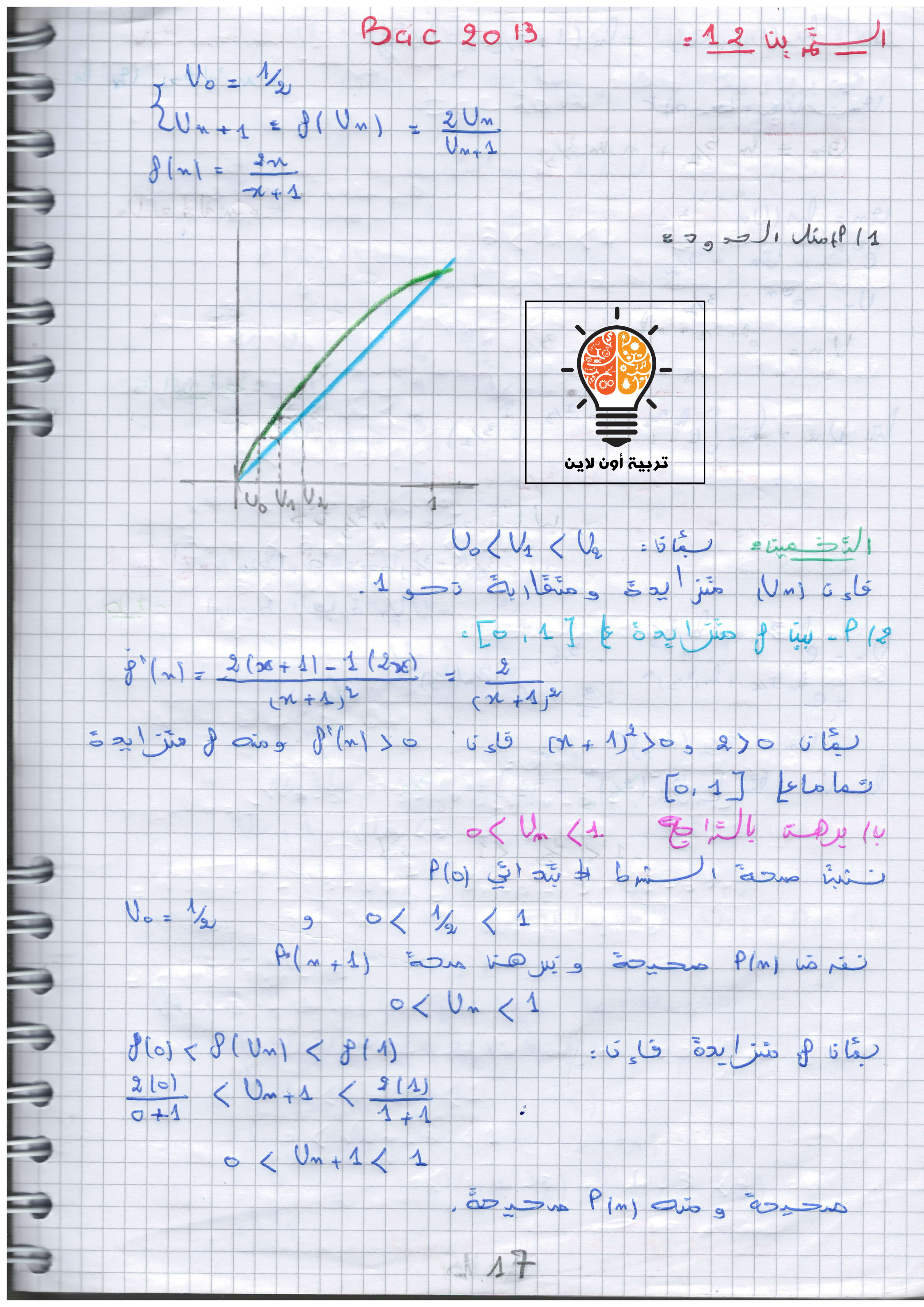
$U_n = e^{\ln 5/2 + n \ln 2/3} - 3/2$

$= e^{\ln 5/2 + \ln (2/3)^n} - \frac{3}{2} = e^{\ln \frac{5}{2}(\frac{2}{3})^n} - 3/2$

$U_n = 5/2 \, (2/3)^n - 3/2$

$\lim U_n = \lim \left[5/2 \, (2/3)^n - 3/2 \right] = -3/2$ ($(2/3)^n \to 0$)

لأن $-1 < 2/3 < 1$



التمرين 12 : Bac 2013

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) = \frac{2U_n}{U_n+1} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2x}{x+1}$$

1) تمثيل الحدود :

التخمين : بما أن $U_0 < U_1 < U_2$

فإن (U_n) متزايدة ومتقاربة نحو 1 .

2) أ- تبيان f متزايدة على $[0,1]$:

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 1(2x)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

بما أن $2>0$ و $(x+1)^2>0$ فإن $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة

تماما على $[0,1]$

ب) برهنة بالتراجع $0 < U_n < 1$

نثبت صحة الشرط الابتدائي $P(0)$

$U_0 = \frac{1}{2}$ و $0 < \frac{1}{2} < 1$

نفرض $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$

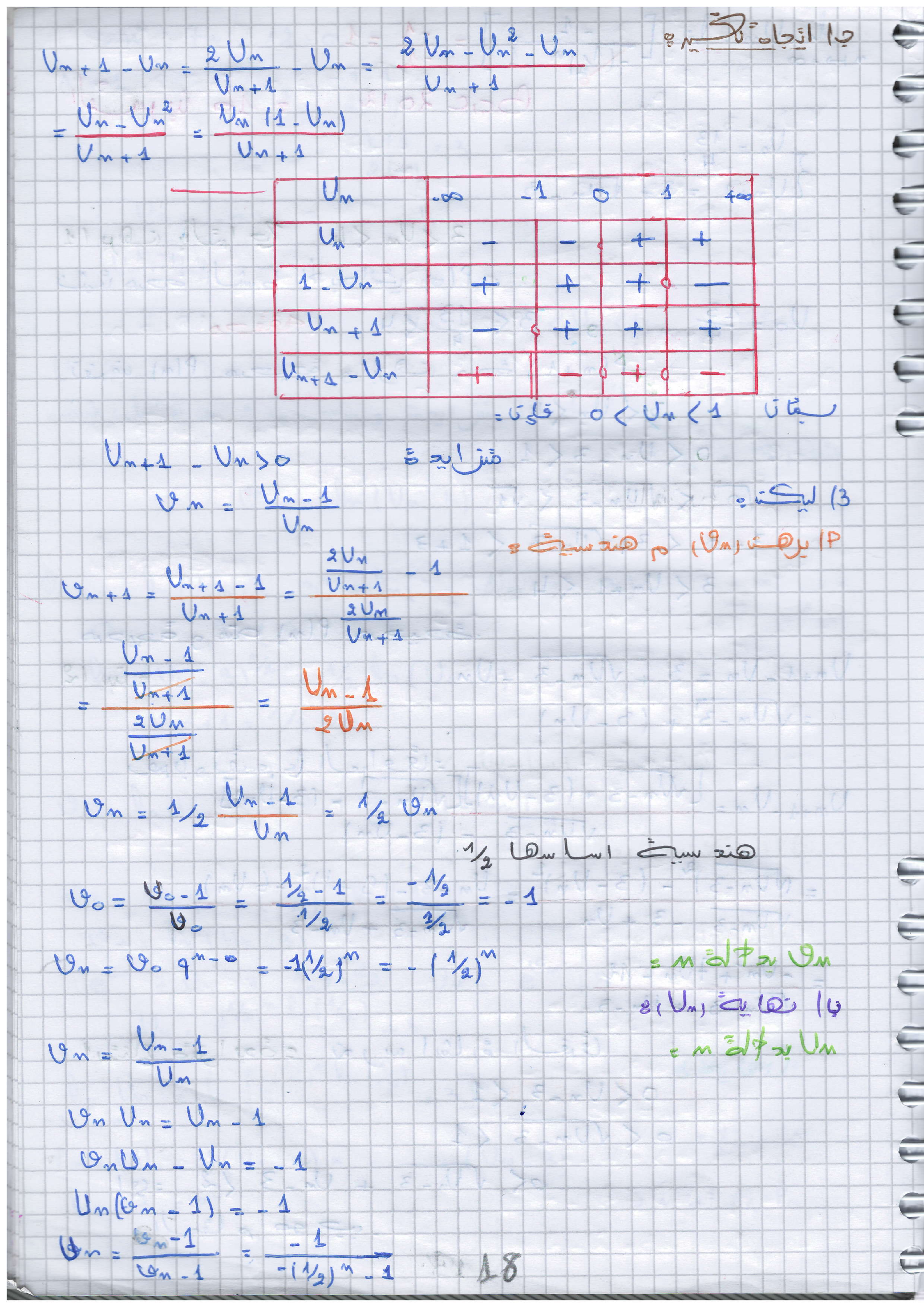
$$0 < U_n < 1$$

بما أن f متزايدة فإن : $f(0) < f(U_n) < f(1)$

$$\frac{2(0)}{0+1} < U_{n+1} < \frac{2(1)}{1+1}$$

$$0 < U_{n+1} < 1$$

صحيحة ومنه $P(n)$ صحيحة.



جـ) اتجاه تغير:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n}{U_n+1} - U_n = \frac{2U_n - U_n^2 - U_n}{U_n+1}$$

$$= \frac{U_n - U_n^2}{U_n+1} = \frac{U_n(1-U_n)}{U_n+1}$$

U_n	$-\infty$ ... -1	-1 ... 0	0 ... 1	1 ... $+\infty$
U_n	$-$	$-$	$+$	$+$
$1-U_n$	$+$	$+$	$+$	$-$
U_n+1	$-$	$+$	$+$	$+$
$U_{n+1}-U_n$	$+$	$-$	$+$	$-$

بما أن $0 < U_n < 1$ فإن:

$U_{n+1} - U_n > 0$ متزايدة

3) ليكن: $v_n = \frac{U_n - 1}{U_n}$

أ) برهن أن (v_n) م هندسية:

$$v_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}} = \frac{\frac{2U_n}{U_n+1} - 1}{\frac{2U_n}{U_n+1}}$$

$$= \frac{\frac{U_n-1}{U_n+1}}{\frac{2U_n}{U_n+1}} = \frac{U_n-1}{2U_n}$$

$$v_n = \frac{1}{2}\,\frac{U_n-1}{U_n} = \frac{1}{2} v_n$$

هندسية أساسها $1/2$

$$v_0 = \frac{U_0-1}{U_0} = \frac{1/2 - 1}{1/2} = \frac{-1/2}{1/2} = -1$$

v_n بدلالة n:

$$v_n = v_0\, q^{n-0} = -1(1/2)^n = -(1/2)^n$$

ب) نهاية (U_n):

U_n بدلالة n:

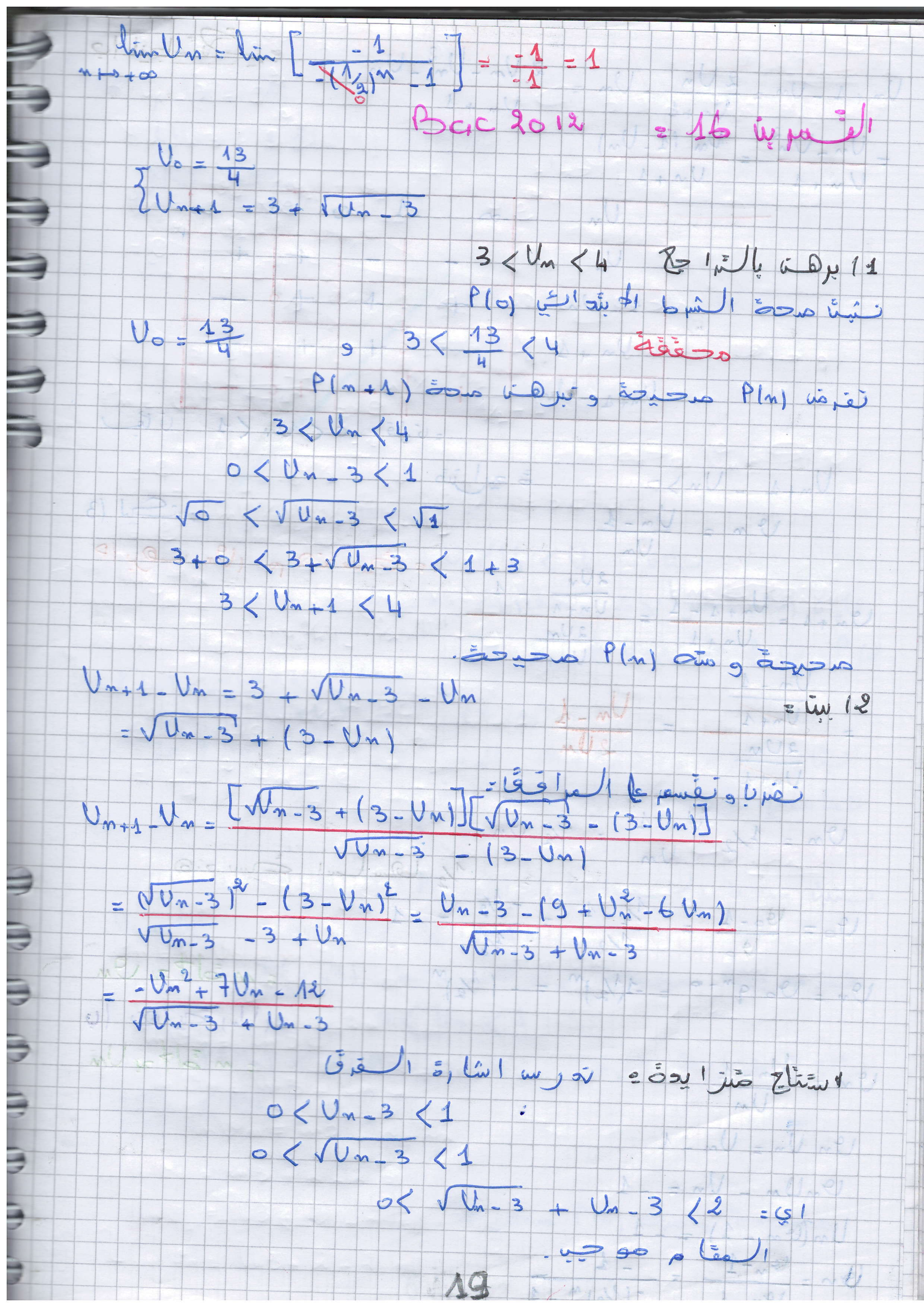
$$v_n = \frac{U_n-1}{U_n}$$

$$v_n U_n = U_n - 1$$

$$v_n U_n - U_n = -1$$

$$U_n(v_n - 1) = -1$$

$$U_n = \frac{-1}{v_n - 1} = \frac{-1}{-(1/2)^n - 1}$$



$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim \left[\frac{-1}{-(1/2)^n - 1}\right] = \frac{-1}{-1} = 1$$

Bac 2012   التمرين 16 :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{13}{4} \\ U_{n+1} = 3 + \sqrt{U_n - 3} \end{cases}$$

1) برهنة بالتراجع $3 < U_n < 4$

نثبت صحة الشرط الابتدائي $P(0)$

$U_0 = \frac{13}{4}$ و $3 < \frac{13}{4} < 4$ محققة

نفرض $P(n)$ صحيحة و نبرهن صحة $P(n+1)$

$$3 < U_n < 4$$
$$0 < U_n - 3 < 1$$
$$\sqrt{0} < \sqrt{U_n - 3} < \sqrt{1}$$
$$3 + 0 < 3 + \sqrt{U_n - 3} < 1 + 3$$
$$3 < U_{n+1} < 4$$

صحيحة و منه $P(n)$ صحيحة.

2) بيان :

$$U_{n+1} - U_n = 3 + \sqrt{U_n - 3} - U_n$$
$$= \sqrt{U_n - 3} + (3 - U_n)$$

نضرب و نقسم على المرافق :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{\left[\sqrt{U_n - 3} + (3 - U_n)\right]\left[\sqrt{U_n - 3} - (3 - U_n)\right]}{\sqrt{U_n - 3} - (3 - U_n)}$$

$$= \frac{(\sqrt{U_n - 3})^2 - (3 - U_n)^2}{\sqrt{U_m - 3} - 3 + U_n} = \frac{U_n - 3 - (9 + U_n^2 - 6U_n)}{\sqrt{U_n - 3} + U_n - 3}$$

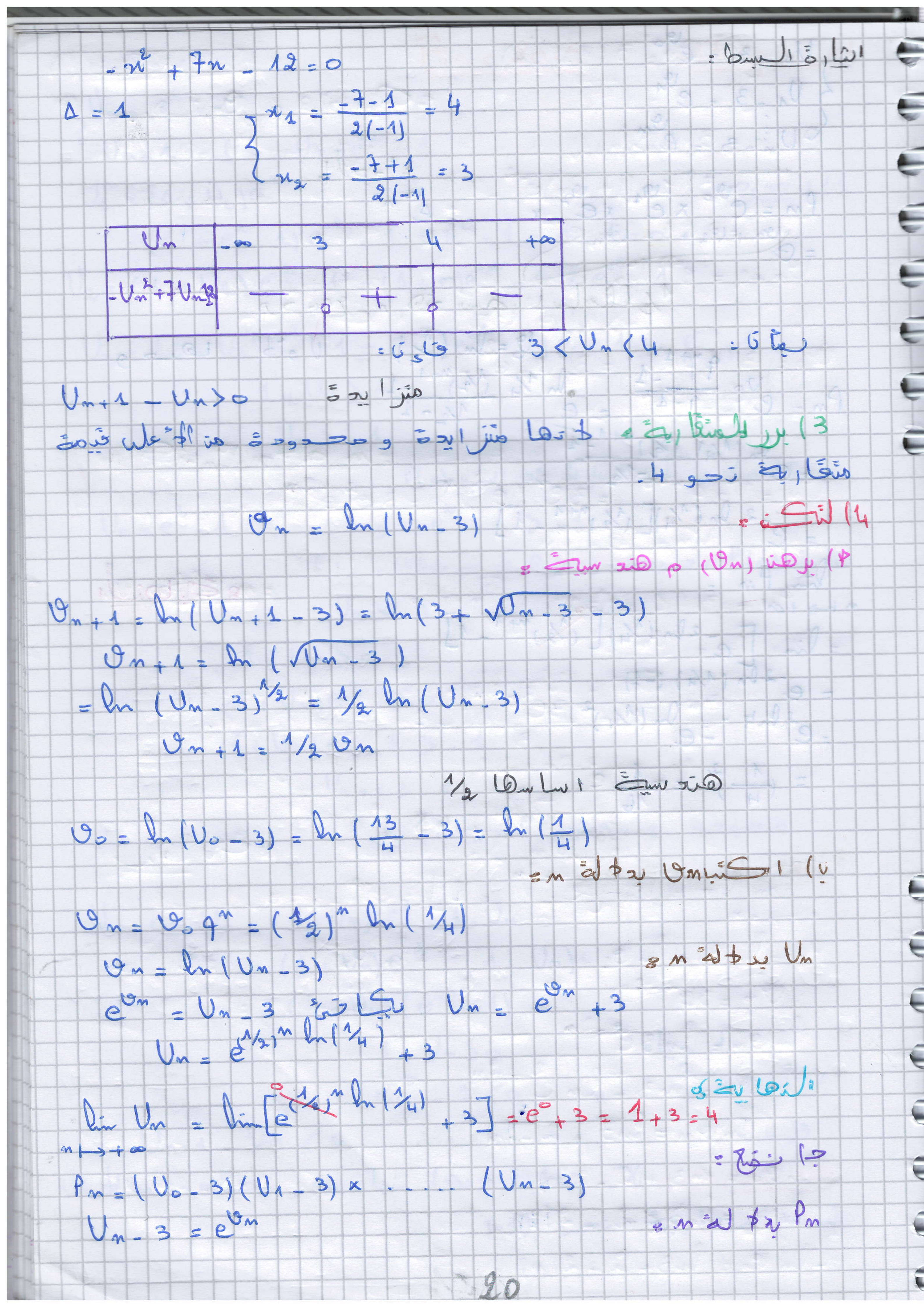
$$= \frac{-U_n^2 + 7U_n - 12}{\sqrt{U_n - 3} + U_n - 3}$$

استنتاج متزايدة : ندرس اشارة الفرق

$$0 < U_n - 3 < 1$$
$$0 < \sqrt{U_n - 3} < 1$$

أي : $0 < \sqrt{U_n - 3} + U_n - 3 < 2$

المقام موجب.



اشارة البسط :

$-x^2+7x-12=0$

$\Delta = 1$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-7-1}{2(-1)} = 4 \\ x_2 = \dfrac{-7+1}{2(-1)} = 3 \end{cases}$$

U_n	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$-U_n^2+7U_n-12$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بما أن : $3 < U_n < 4$ فإن :

$U_{n+1} - U_n > 0$ متزايدة

3) برر المتقاربة : لأنها متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو 4.

4) لتكن :

$$v_n = \ln(U_n - 3)$$

أ) برهن (v_n) م هندسية :

$$v_{n+1} = \ln(U_{n+1}-3) = \ln(3+\sqrt{U_n-3}-3)$$

$$v_{n+1} = \ln(\sqrt{U_n-3})$$

$$= \ln(U_n-3)^{1/2} = 1/2 \ln(U_n-3)$$

$$v_{n+1} = 1/2\, v_n$$

هندسية أساسها $1/2$

$$v_0 = \ln(U_0-3) = \ln\left(\frac{13}{4}-3\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

ب) اكتب v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln(1/4)$$

U_n بدلالة n :

$$v_n = \ln(U_n-3)$$

$e^{v_n} = U_n - 3$ يكافئ $U_n = e^{v_n} + 3$

$$U_n = e^{(1/2)^n \ln(1/4)} + 3$$

النهاية كي :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim \left[e^{(1/2)^n \ln(1/4)} + 3\right] = e^0 + 3 = 1 + 3 = 4$$

جـ) نضع :

$$P_n = (U_0-3)(U_1-3) \times \dots \dots (U_n-3)$$

P_n بدلالة n :

$$U_n - 3 = e^{v_n}$$

$$\begin{cases} U_0 - 3 = e^{v_0} \\ U_1 - 3 = e^{v_1} \\ \vdots \\ U_n - 3 = e^{v_n} \end{cases}$$

بالجداء

$$P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots e^{v_n}$$

$$= e^{v_0 + v_1 + \dots v_n}$$

مجموع م هندسية اساسها $1/2$

ومنها $q = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$ و $v_0 = $

$$P_n = e^{v_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}} = e^{\ln 1/4 \frac{(1/2)^{n+1} - 1}{1/2 - 1}}$$

$$= e^{\ln(1/4) \frac{(1/2)^{n+1} - 1}{-1/2}}$$

$$= e^{-2 \ln(1/4)\left[(1/2)^{n+1} - 1\right]}$$

النهاية:

$$\lim_{n \to +\infty} P_n =$$

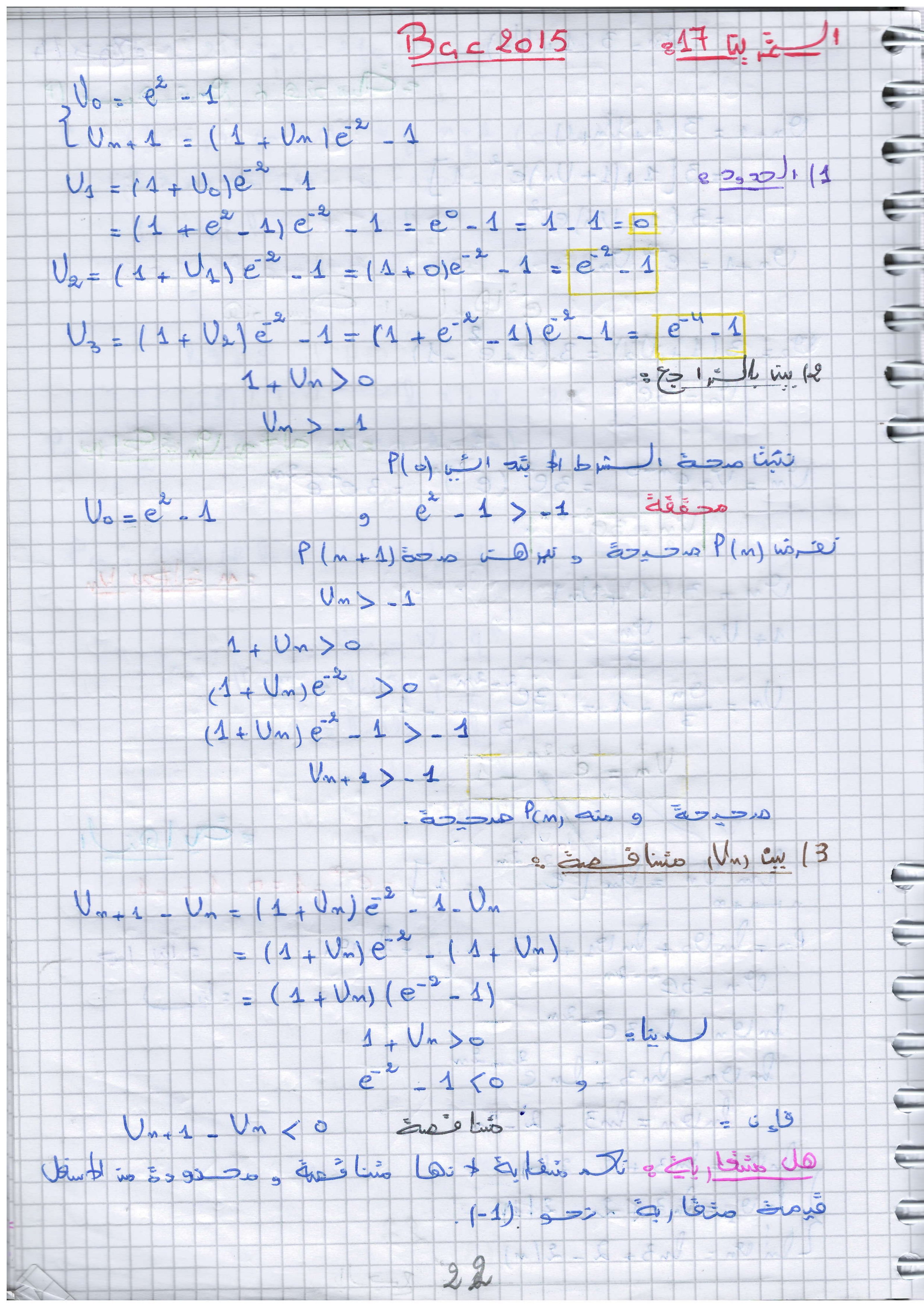
$$= \lim \left[e^{-2\ln(1/4)\left[(1/2)^{n+1} - 1\right]}\right]$$

$$= e^{-2\ln(1/4)(-1)}$$

$$= e^{2\ln 4} = e^{\ln(1/4)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

50 + 49 + 48 + A



Bac 2015 — التمرين 17:

$$\begin{cases} U_0 = e^2 - 1 \\ U_{n+1} = (1 + U_n)e^{-2} - 1 \end{cases}$$

1) الحدود:

$U_1 = (1 + U_0)e^{-2} - 1$

$= (1 + e^2 - 1)e^{-2} - 1 = e^0 - 1 = 1 - 1 = \boxed{0}$

$U_2 = (1 + U_1)e^{-2} - 1 = (1 + 0)e^{-2} - 1 = \boxed{e^{-2} - 1}$

$U_3 = (1 + U_2)e^{-2} - 1 = (1 + e^{-2} - 1)e^{-2} - 1 = \boxed{e^{-4} - 1}$

2) بينا بالتراجع:

$1 + U_n > 0$

$U_n > -1$

نثبت صحة الشرط ابتدائيا $P(0)$

$U_0 = e^2 - 1$ و $e^2 - 1 > -1$ محققة

نفرض $P(n)$ صحيحة و نبرهن صحة $P(n+1)$

$U_n > -1$

$1 + U_n > 0$

$(1 + U_n)e^{-2} > 0$

$(1 + U_n)e^{-2} - 1 > -1$

$U_{n+1} > -1$

صحيحة و منه $P(n)$ صحيحة.

3) بين (U_n) متناقصة:

$U_{n+1} - U_n = (1 + U_n)e^{-2} - 1 - U_n$

$= (1 + U_n)e^{-2} - (1 + U_n)$

$= (1 + U_n)(e^{-2} - 1)$

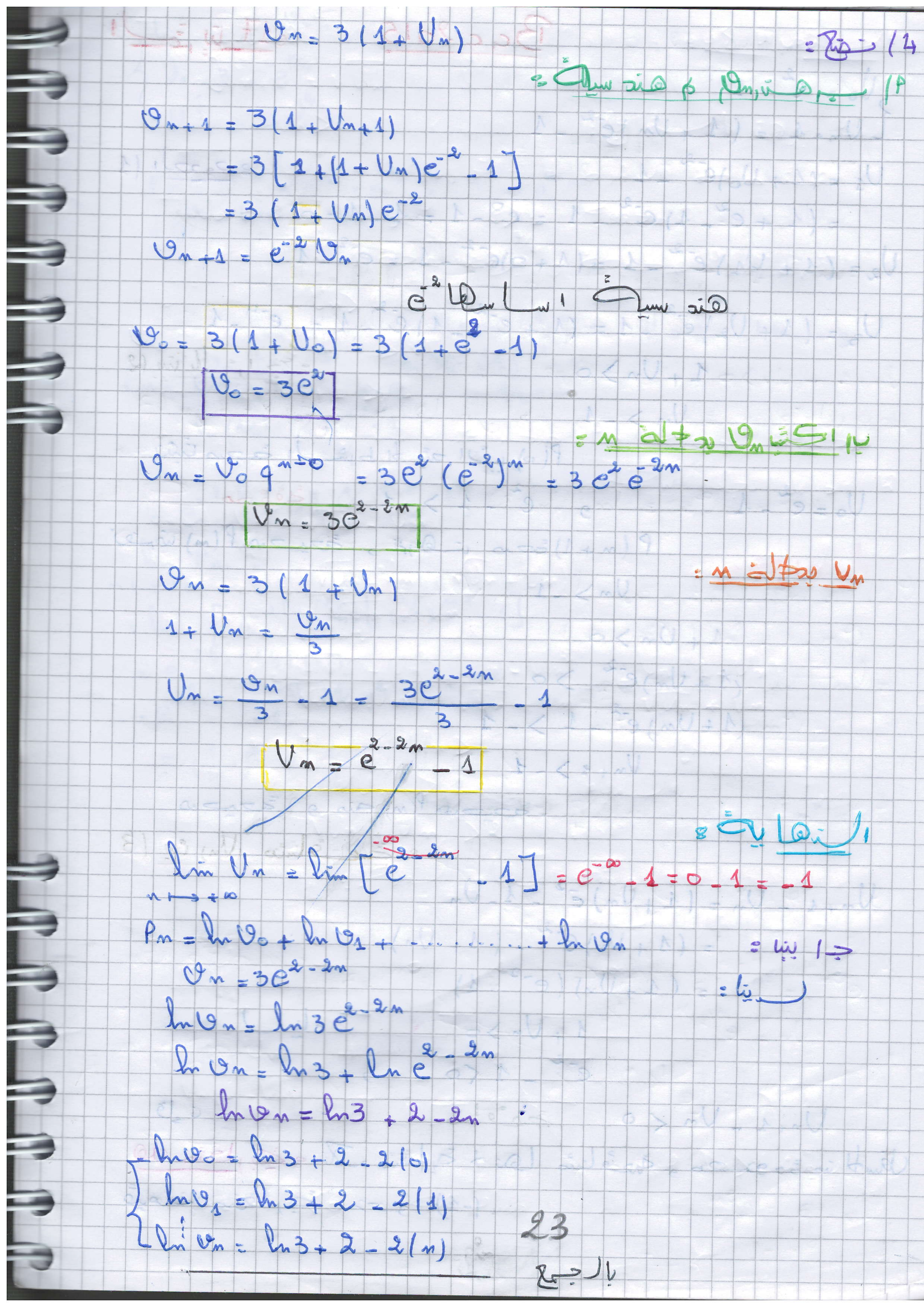
لدينا: $1 + U_n > 0$

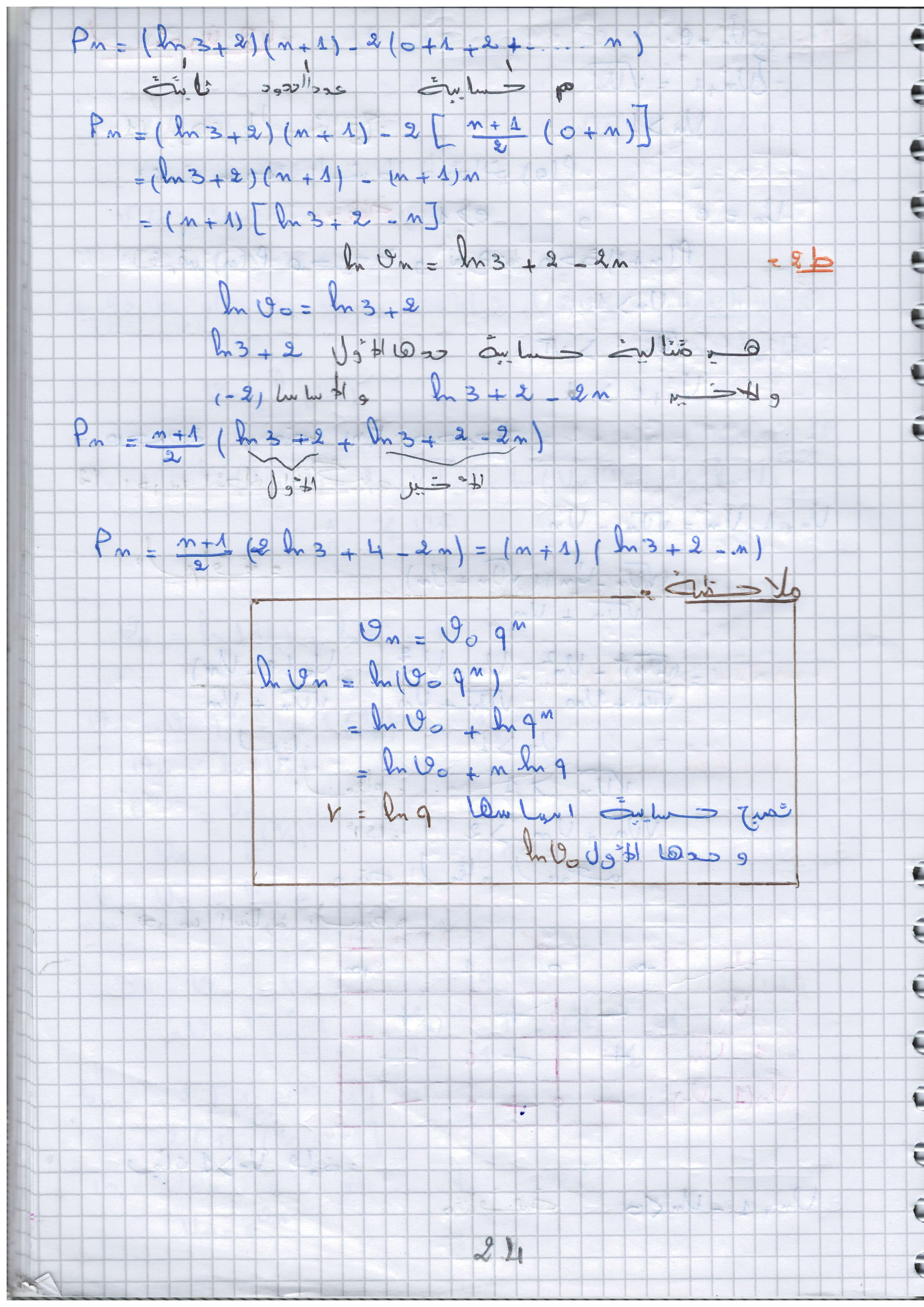
و $e^{-2} - 1 < 0$

فإن: $U_{n+1} - U_n < 0$ متناقصة

هل متقاربة: نعم متقاربة لأنها متناقصة و محدودة من الأسفل

فيمكن متقاربة نحو (-1).





$$P_n = (\ln 3 + 2)(n+1) - 2(0 + 1 + 2 + \dots n)$$

ثابتة   عدد الحدود   م حسابية

$$P_n = (\ln 3 + 2)(n+1) - 2\left[\frac{n+1}{2}(0+n)\right]$$

$$= (\ln 3 + 2)(n+1) - (n+1)n$$

$$= (n+1)\left[\ln 3 + 2 - n\right]$$

ط2 -

$$\ln v_n = \ln 3 + 2 - 2n$$

$$\ln v_0 = \ln 3 + 2$$

هي متتالية حسابية حدها الأول $\ln 3 + 2$

والأخير $\ln 3 + 2 - 2n$ وأساسها (-2)

$$P_n = \frac{n+1}{2}\left(\underbrace{\ln 3 + 2}_{\text{الأول}} + \underbrace{\ln 3 + 2 - 2n}_{\text{الأخير}}\right)$$

$$P_n = \frac{n+1}{2}(2\ln 3 + 4 - 2n) = (n+1)(\ln 3 + 2 - n)$$

ملاحظة:

$$v_n = v_0 q^n$$

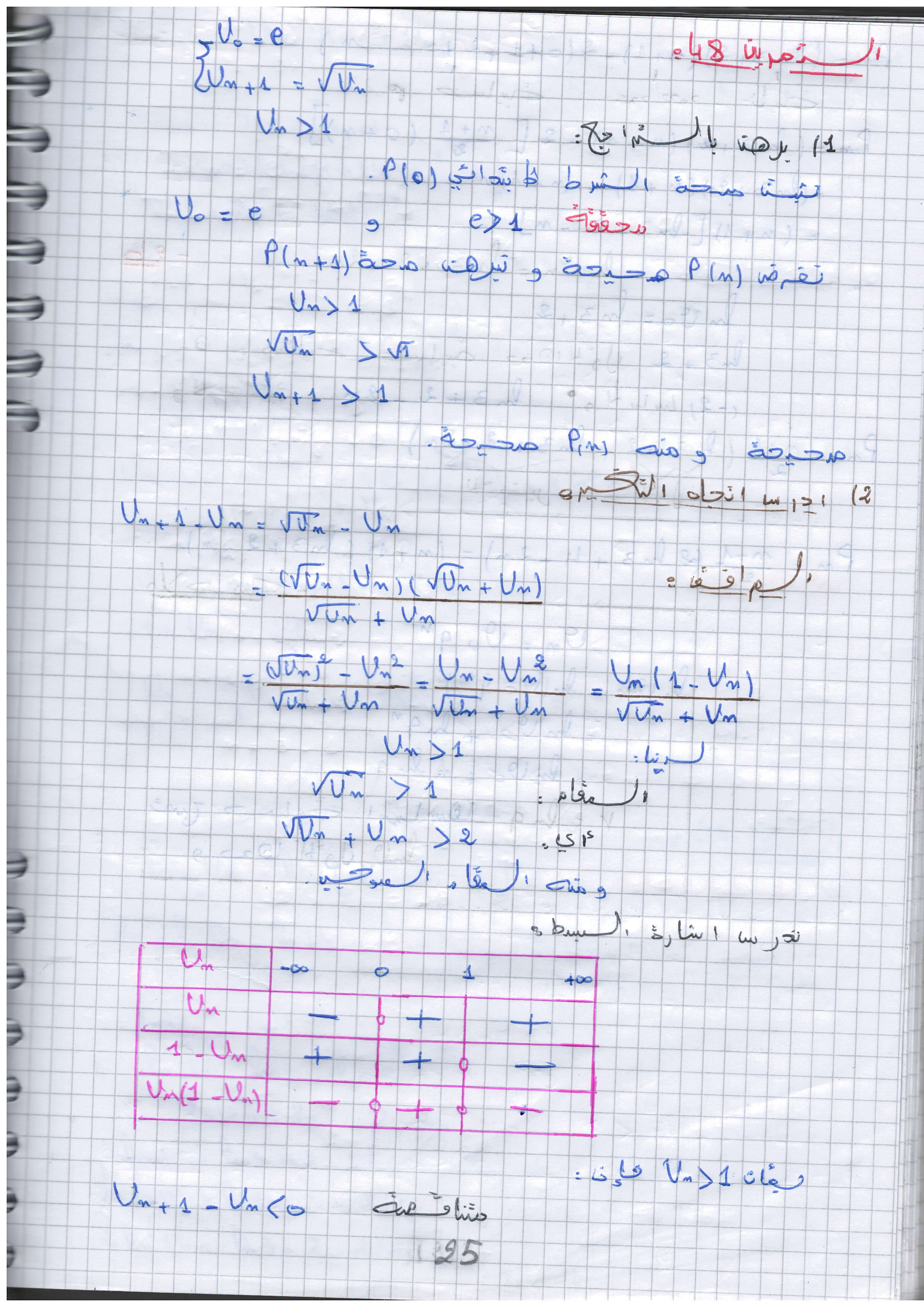
$$\ln v_n = \ln(v_0 q^n)$$

$$= \ln v_0 + \ln q^n$$

$$= \ln v_0 + n \ln q$$

تصبح حسابية أساسها $r = \ln q$

وحدها الأول $\ln v_0$



التمرين 48:

$$\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} \end{cases}$$

1) برهن بالتراجع: $U_n > 1$

نثبت صحة الشرط الابتدائي $P(0)$.

$U_0 = e$ و $e > 1$ محققة

نفرض $P(n)$ صحيحة و نبرهن صحة $P(n+1)$

$U_n > 1$

$\sqrt{U_n} > \sqrt{1}$

$U_{n+1} > 1$

صحيحة و منه $P(n)$ صحيحة.

2) ادرس اتجاه التغير:

$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n} - U_n$

المرافق:

$$= \frac{(\sqrt{U_n} - U_n)(\sqrt{U_n} + U_n)}{\sqrt{U_n} + U_n}$$

$$= \frac{(\sqrt{U_n})^2 - U_n^2}{\sqrt{U_n} + U_n} = \frac{U_n - U_n^2}{\sqrt{U_n} + U_n} = \frac{U_n(1 - U_n)}{\sqrt{U_n} + U_n}$$

لدينا: $U_n > 1$

المقام: $\sqrt{U_n} > 1$

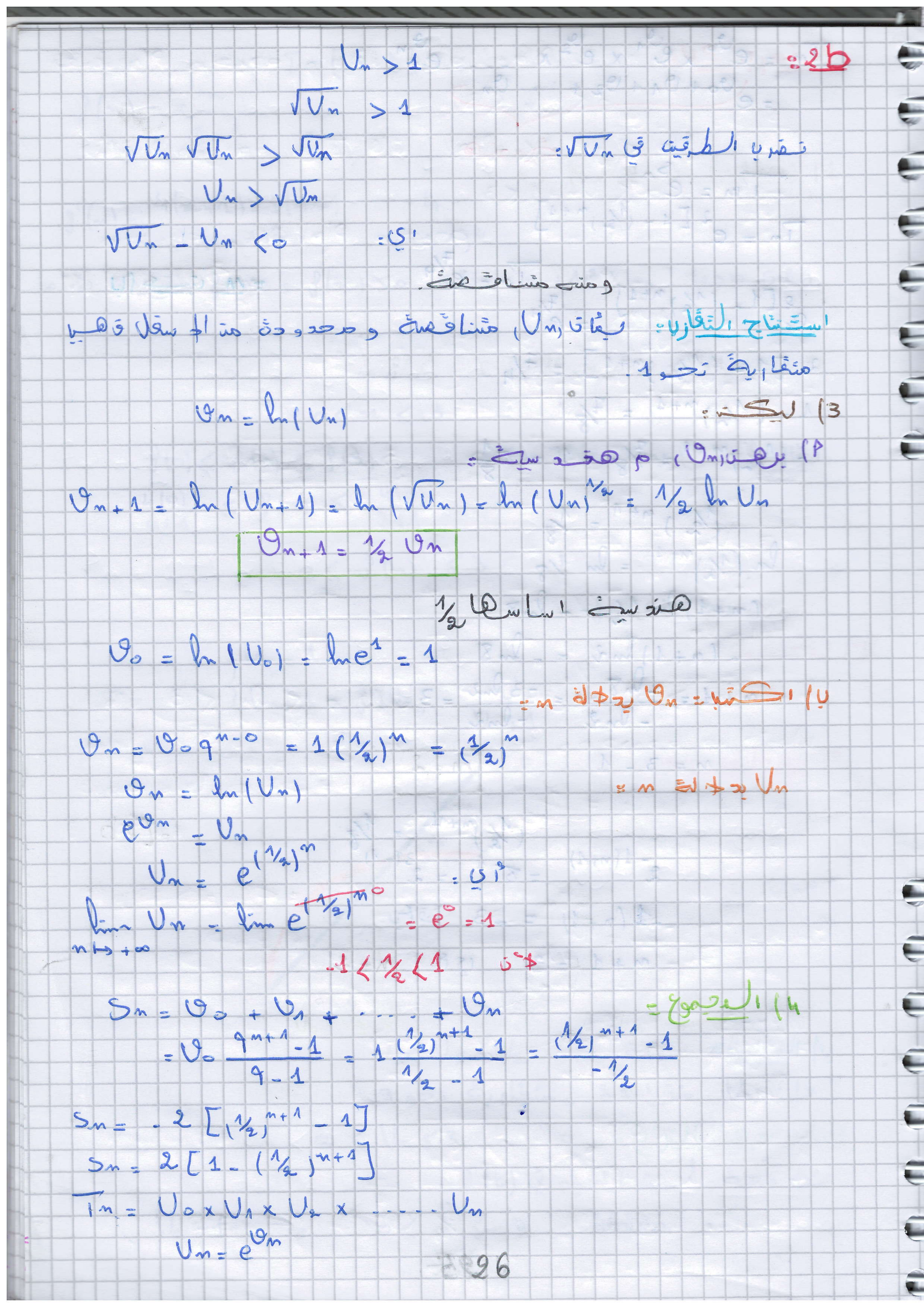
أي: $\sqrt{U_n} + U_n > 2$

ومنه المقام موجب.

ندرس اشارة البسط:

U_n	$-\infty$		0		1		$+\infty$
U_n		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - U_n$		$+$		$+$	0	$-$	
$U_n(1 - U_n)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بما أن $U_n > 1$ فإن: $U_{n+1} - U_n < 0$ متناقصة



2ب:

$$U_n > 1$$

$$\sqrt{U_n} > 1$$

نضرب الطرفين في $\sqrt{U_n}$:

$$\sqrt{U_n}\,\sqrt{U_n} > \sqrt{U_n}$$

$$U_n > \sqrt{U_n}$$

أي:

$$\sqrt{U_n} - U_n < 0$$

ومنه متناقصة.

استنتاج التقارب: بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو 1.

3) ليكن:

$$v_n = \ln(U_n)$$

أ) برهن أن (v_n) هندسية:

$$v_{n+1} = \ln(U_{n+1}) = \ln(\sqrt{U_n}) = \ln(U_n)^{1/2} = \tfrac{1}{2}\ln U_n$$

$$\boxed{v_{n+1} = \tfrac{1}{2} v_n}$$

هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

$$v_0 = \ln(U_0) = \ln e^1 = 1$$

ب) اكتب v_n بدلالة n:

$$v_n = v_0 q^{n-0} = 1\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

U_n بدلالة n:

$$v_n = \ln(U_n)$$

$$e^{v_n} = U_n$$

أي:

$$U_n = e^{(1/2)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim e^{(1/2)^n} = e^0 = 1$$

لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

4) المجموع:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

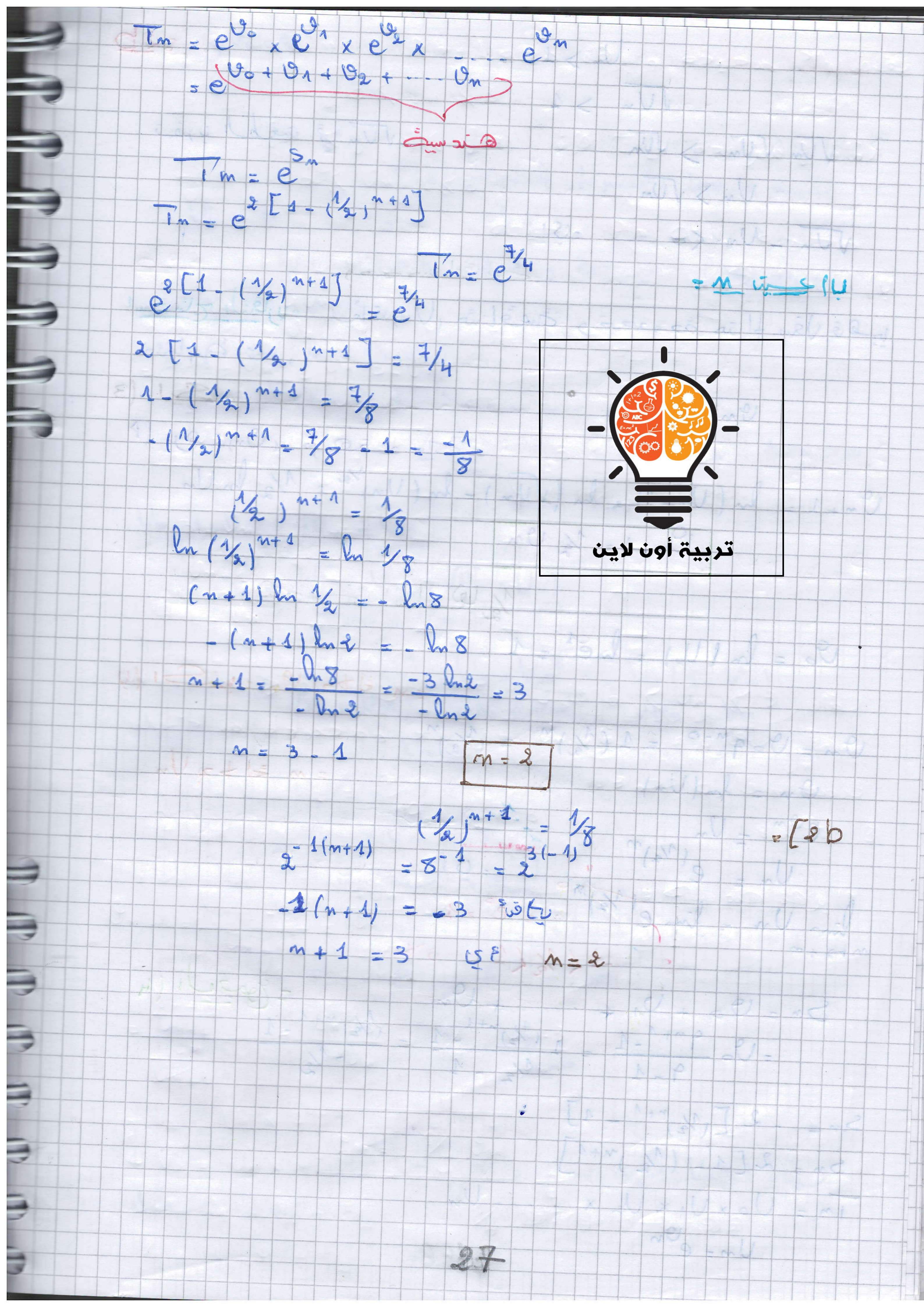
$$= v_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = 1\,\frac{(1/2)^{n+1}-1}{1/2 - 1} = \frac{(1/2)^{n+1}-1}{-1/2}$$

$$S_n = -2\left[(1/2)^{n+1} - 1\right]$$

$$S_n = 2\left[1 - (1/2)^{n+1}\right]$$

$$T_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times \dots U_n$$

$$U_n = e^{v_n}$$



$$T_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots e^{v_n}$$

$$= e^{v_0 + v_1 + v_2 + \dots v_n}$$

هندسية

$$T_n = e^{S_n}$$

$$T_n = e^{2\left[1-(1/2)^{n+1}\right]}$$

$$T_n = e^{7/4}$$

بالعكس n =

$$e^{2\left[1-(1/2)^{n+1}\right]} = e^{7/4}$$

$$2\left[1-(1/2)^{n+1}\right] = 7/4$$

$$1-(1/2)^{n+1} = 7/8$$

$$-(1/2)^{n+1} = 7/8 - 1 = \frac{-1}{8}$$

$$(1/2)^{n+1} = 1/8$$

$$\ln (1/2)^{n+1} = \ln 1/8$$

$$(n+1)\ln 1/2 = -\ln 8$$

$$-(n+1)\ln 2 = -\ln 8$$

$$n+1 = \frac{-\ln 8}{-\ln 2} = \frac{-3\ln 2}{-\ln 2} = 3$$

$$n = 3 - 1$$

$$\boxed{n = 2}$$

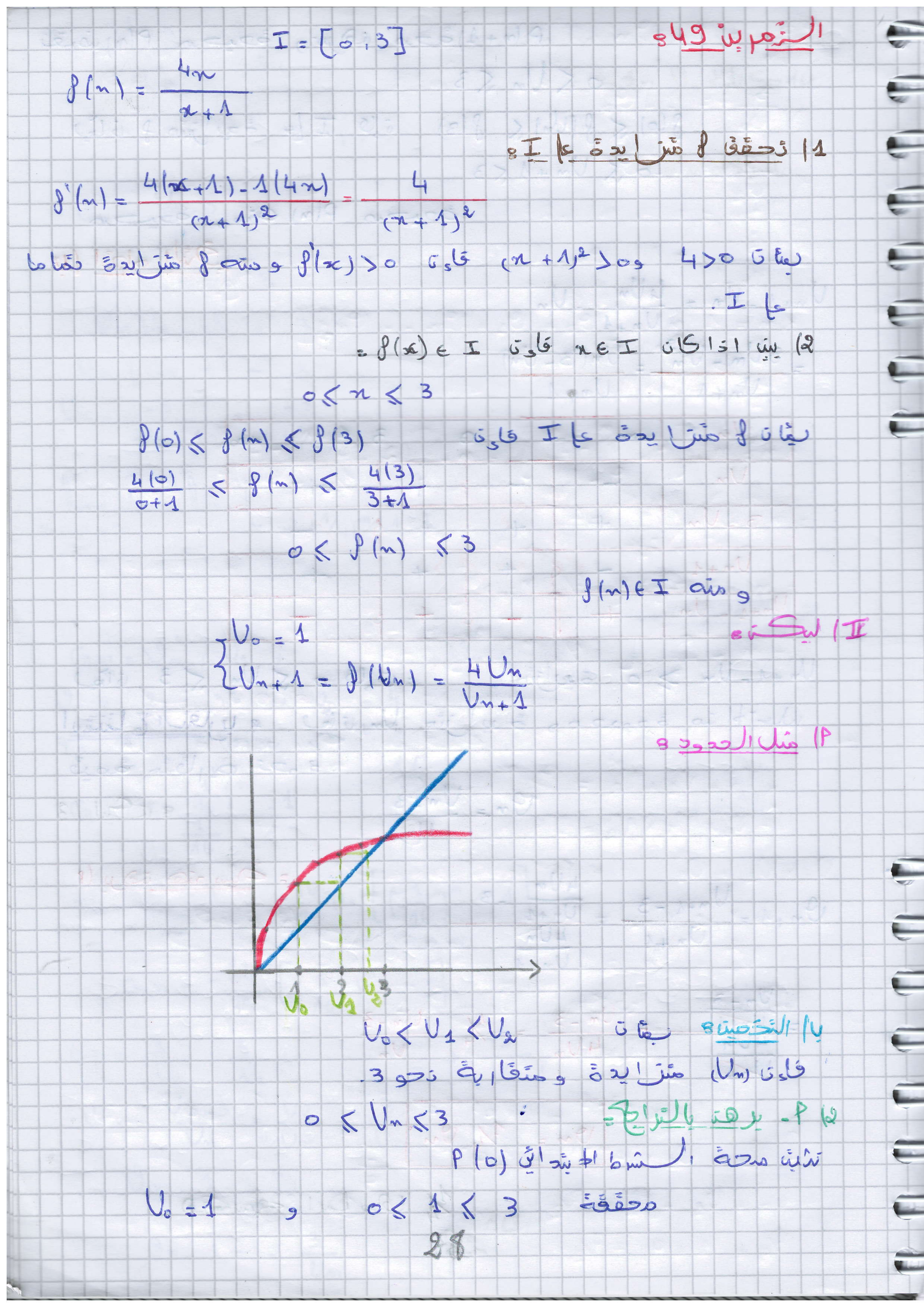
طريقة 2b

$$(1/2)^{n+1} = 1/8$$

$$2^{-1(n+1)} = 8^{-1} = 2^{3(-1)}$$

$$-1(n+1) = -3 \quad \text{يعني}$$

$$n+1 = 3 \quad \text{أي} \quad n = 2$$



التمرين 49:

$$I = [0 ; 3]$$

$$f(x) = \frac{4x}{x+1}$$

1/ تحقق f متزايدة على I:

$$f'(x) = \frac{4(x+1) - 1(4x)}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$$

بما أن $4>0$ و $(x+1)^2>0$ فإن $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على I.

2) بين اذا كان $x \in I$ فإن $f(x) \in I$:

$$0 \leq x \leq 3$$

بما أن f متزايدة على I فإن $f(0) \leq f(x) \leq f(3)$

$$\frac{4(0)}{0+1} \leq f(x) \leq \frac{4(3)}{3+1}$$

$$0 \leq f(x) \leq 3$$

ومنه $f(x) \in I$

II/ المتتالية:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) = \frac{4U_n}{U_n+1} \end{cases}$$

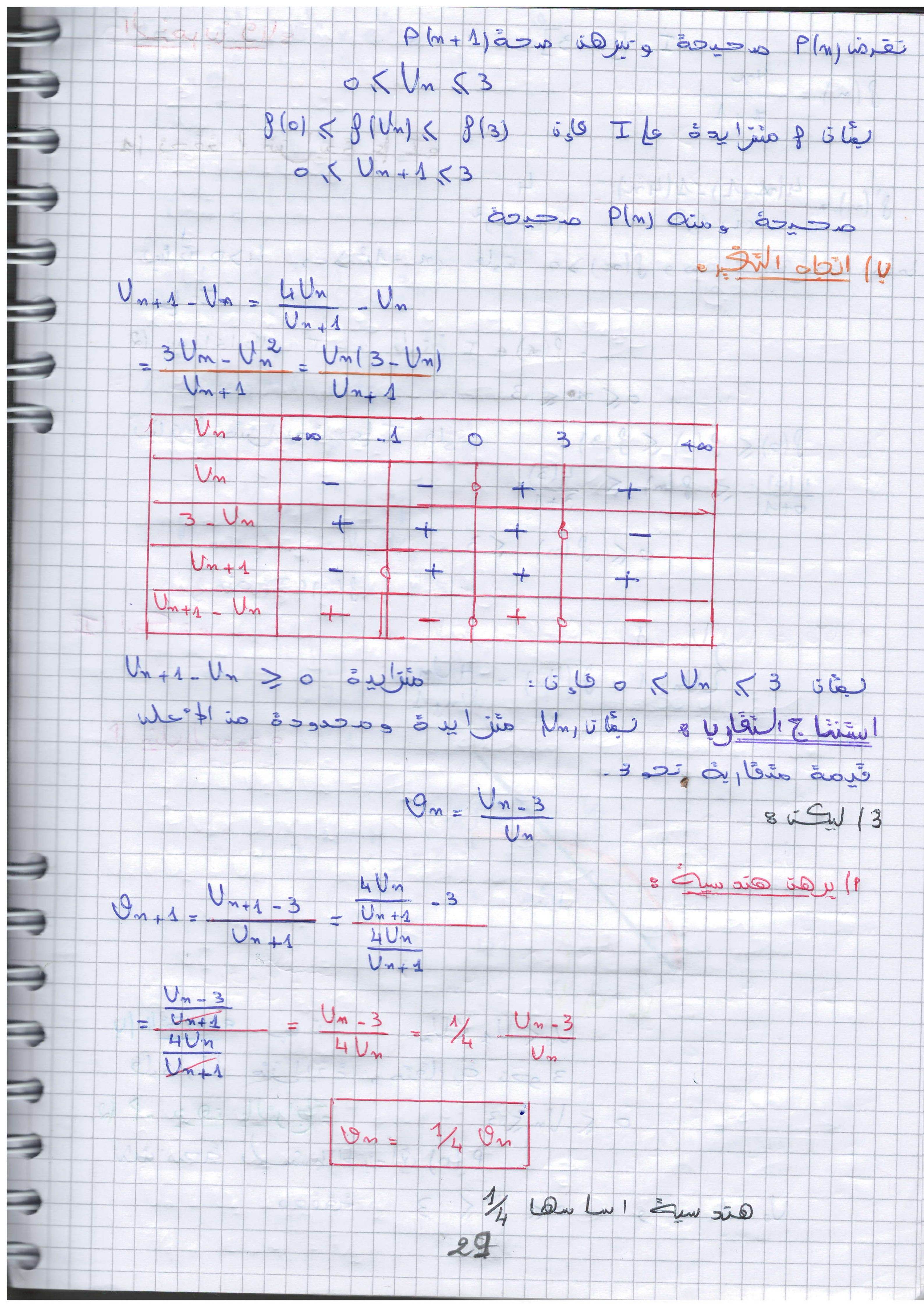
1) مثل الحدود:

ب) التخمين: بما أن $U_0 < U_1 < U_2$ فإن (U_n) متزايدة ومتقاربة نحو 3.

2) أ- برهن بالتراجع: $0 \leq U_n \leq 3$

نثبت صحة الشرط الابتدائي $P(0)$

$U_0 = 1$ و $0 \leq 1 \leq 3$ محققة



نفرض $P(n)$ صحيحة و نبرهن صحة $P(n+1)$

$$0 \leq U_n \leq 3$$

بما أن f متزايدة على I فإن $f(0) \leq f(U_n) \leq f(3)$

$$0 \leq U_{n+1} \leq 3$$

صحيحة ومنه $P(n)$ صحيحة

ب) اتجاه التغير:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n}{U_n+1} - U_n$$

$$= \frac{3U_n - U_n^2}{U_n+1} = \frac{U_n(3-U_n)}{U_n+1}$$

U_n	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
U_n		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-U_n$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
U_n+1		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$U_{n+1}-U_n$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

بما أن $0 \leq U_n \leq 3$ فإن: $U_{n+1} - U_n \geq 0$ متزايدة

استنتاج التقارب: بما أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو 3.

3) لدينا: $V_n = \frac{U_n-3}{U_n}$

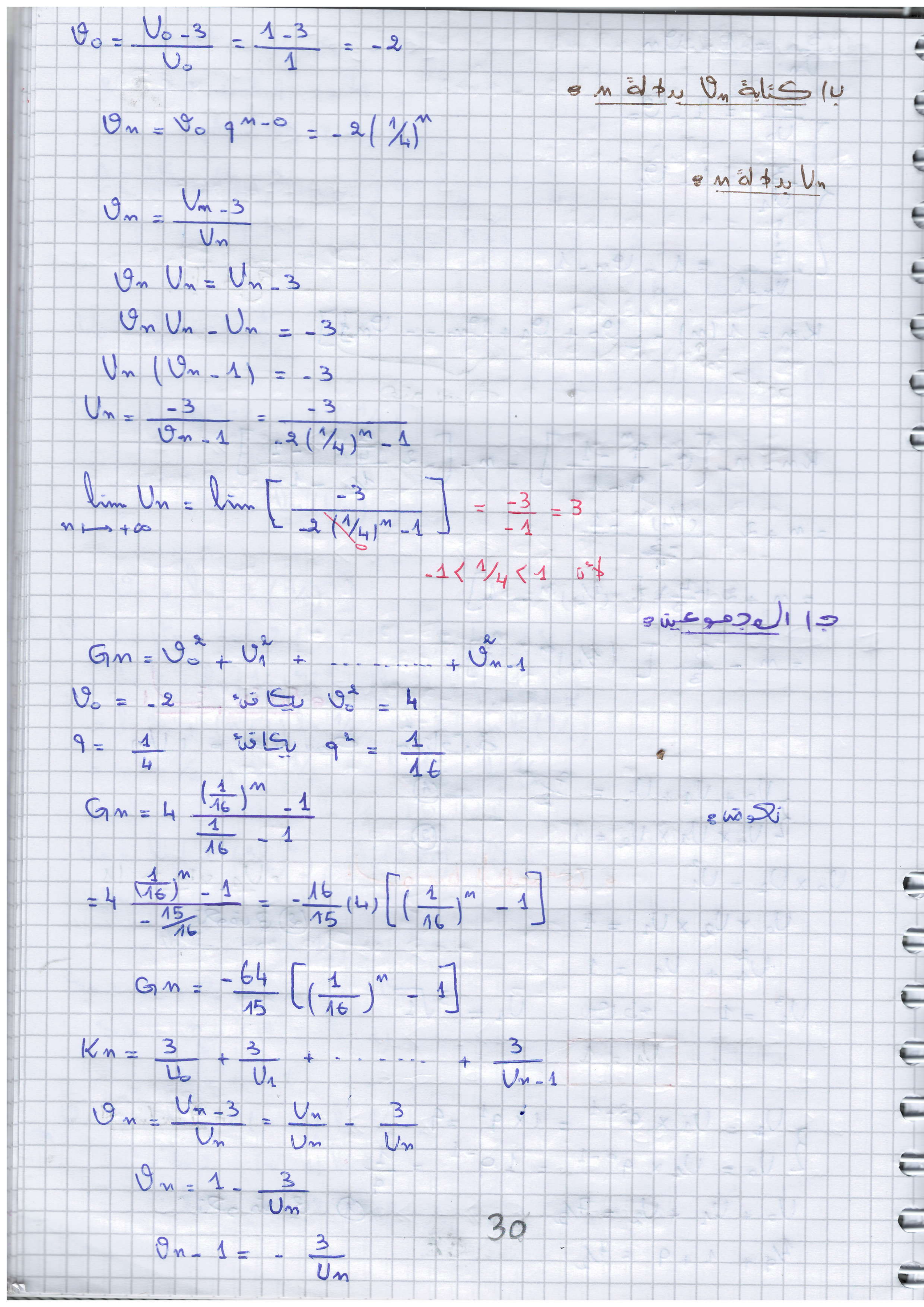
أ) برهن هندسية:

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-3}{U_{n+1}} = \frac{\frac{4U_n}{U_n+1} - 3}{\frac{4U_n}{U_n+1}}$$

$$= \frac{\frac{U_n-3}{U_n+1}}{\frac{4U_n}{U_n+1}} = \frac{U_n-3}{4U_n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{U_n-3}{U_n}$$

$$\boxed{V_n = \frac{1}{4} V_n}$$

هندسية أساسها $\frac{1}{4}$



$$v_0 = \frac{U_0 - 3}{U_0} = \frac{1-3}{1} = -2$$

ب) كتابة v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 \, q^{n-0} = -2\left(\tfrac{1}{4}\right)^n$$

U_n بدلالة n :

$$v_n = \frac{U_n - 3}{U_n}$$

$$v_n U_n = U_n - 3$$

$$v_n U_n - U_n = -3$$

$$U_n (v_n - 1) = -3$$

$$U_n = \frac{-3}{v_n - 1} = \frac{-3}{-2\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim \left[\frac{-3}{-2\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1} \right] = \frac{-3}{-1} = 3$$

لأن $-1 < \frac{1}{4} < 1$

ج) المجموعين :

$$G_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots\dots + v_{n-1}^2$$

$v_0 = -2$ يكافئ $v_0^2 = 4$

$q = \frac{1}{4}$ يكافئ $q^2 = \frac{1}{16}$

$$G_n = 4 \, \frac{\left(\frac{1}{16}\right)^n - 1}{\frac{1}{16} - 1}$$

نعوض :

$$= 4 \, \frac{\left(\frac{1}{16}\right)^n - 1}{-\frac{15}{16}} = -\frac{16}{15}(4)\left[\left(\frac{1}{16}\right)^n - 1\right]$$

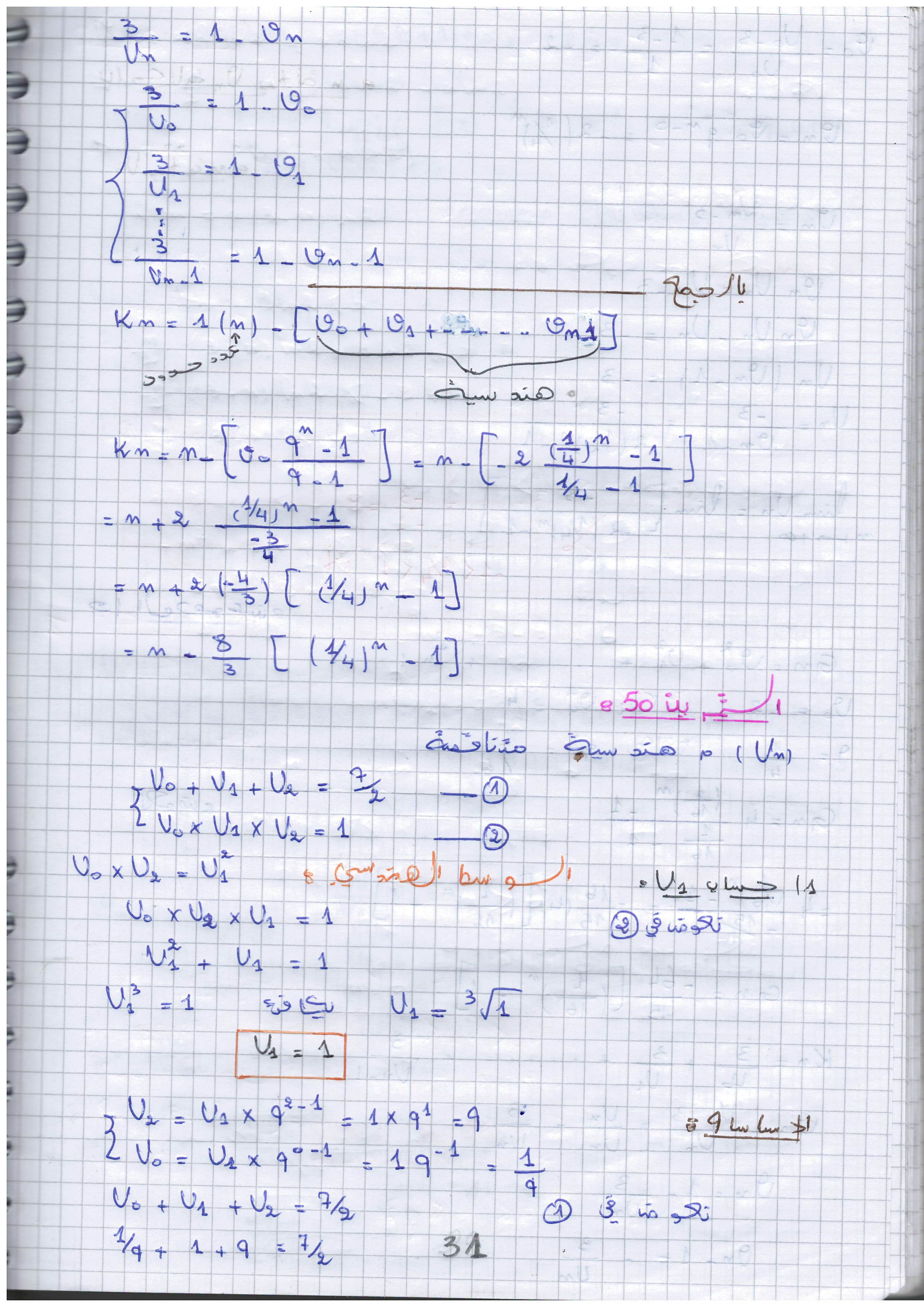
$$G_n = -\frac{64}{15}\left[\left(\frac{1}{16}\right)^n - 1\right]$$

$$K_n = \frac{3}{U_0} + \frac{3}{U_1} + \dots\dots + \frac{3}{U_{n-1}}$$

$$v_n = \frac{U_n - 3}{U_n} = \frac{U_n}{U_n} - \frac{3}{U_n}$$

$$v_n = 1 - \frac{3}{U_n}$$

$$v_n - 1 = -\frac{3}{U_n}$$



$$\frac{3}{U_n} = 1 - v_n$$

$$\begin{cases} \dfrac{3}{U_0} = 1 - v_0 \\ \dfrac{3}{U_1} = 1 - v_1 \\ \vdots \\ \dfrac{3}{U_{n-1}} = 1 - v_{n-1} \end{cases}$$

بالجمع

$$K_n = 1(n) - [v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}]$$

عدد الحدود (n)

هندسية ($v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$)

$$K_n = n - \left[v_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}\right] = n - \left[-2 \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1}\right]$$

$$= n + 2 \frac{(1/4)^n - 1}{-\frac{3}{4}}$$

$$= n + 2\left(-\frac{4}{3}\right)\left[(1/4)^n - 1\right]$$

$$= n - \frac{8}{3}\left[(1/4)^n - 1\right]$$

التمرين 50 :

(U_n) م هندسية متناقصة

$$\begin{cases} U_0 + U_1 + U_2 = \frac{7}{2} & \text{—— (1)} \\ U_0 \times U_1 \times U_2 = 1 & \text{—— (2)} \end{cases}$$

1/ حساب U_1 :

الوسط الهندسي :

$$U_0 \times U_2 = U_1^2$$

نعوض في (2)

$$U_0 \times U_2 \times U_1 = 1$$

$$U_1^2 + U_1 = 1$$

$$U_1^3 = 1 \quad \text{يعني} \quad U_1 = \sqrt[3]{1}$$

$$\boxed{U_1 = 1}$$

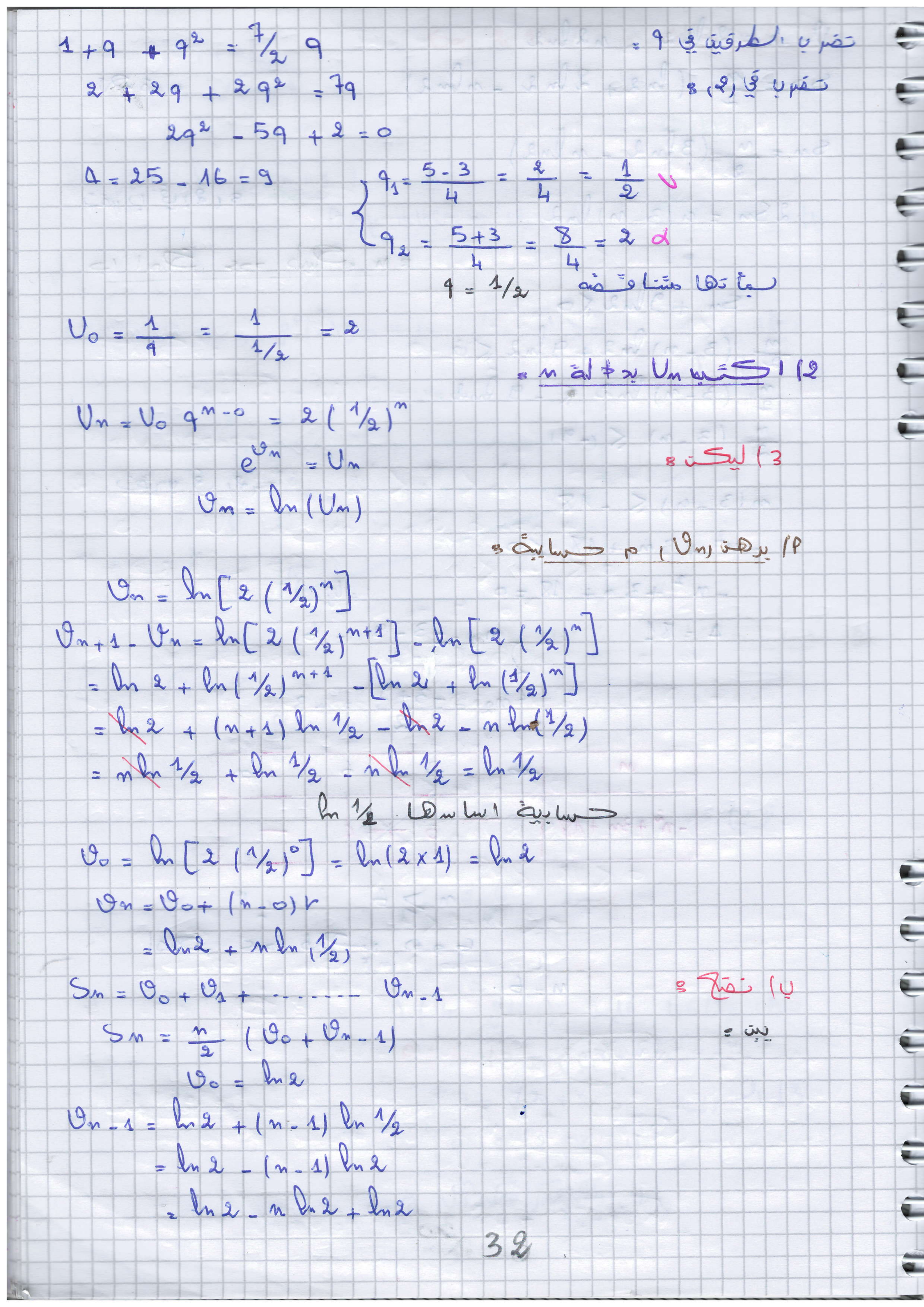
حساب q :

$$\begin{cases} U_2 = U_1 \times q^{2-1} = 1 \times q^1 = q \\ U_0 = U_1 \times q^{0-1} = 1 q^{-1} = \frac{1}{q} \end{cases}$$

نعوض في (1)

$$U_0 + U_1 + U_2 = 7/2$$

$$1/q + 1 + q = 7/2$$



نضرب الطرفين في q :

$1 + q + q^2 = \frac{7}{2} q$

نضرب في (2) :

$2 + 2q + 2q^2 = 7q$

$2q^2 - 5q + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$$\begin{cases} q_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ q_2 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

بما أنها متناقصة $q = 1/2$

$U_0 = \frac{1}{q} = \frac{1}{1/2} = 2$

2) اكتب U_n بدلالة n :

$U_n = U_0 q^{n-0} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) ليكن :

$e^{\vartheta_n} = U_n$

$\vartheta_n = \ln(U_n)$

4) برهن (ϑ_n) م حسابية :

$\vartheta_n = \ln\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$\vartheta_{n+1} - \vartheta_n = \ln\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - \ln\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$= \ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left[\ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$= \ln 2 + (n+1)\ln\frac{1}{2} - \ln 2 - n\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$= n\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2} - n\ln\frac{1}{2} = \ln\frac{1}{2}$

حسابية أساسها $\ln\frac{1}{2}$

$\vartheta_0 = \ln\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^0\right] = \ln(2 \times 1) = \ln 2$

$\vartheta_n = \vartheta_0 + (n-0)r$

$= \ln 2 + n\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

5) نستنتج :

$S_n = \vartheta_0 + \vartheta_1 + \dots\dots \vartheta_{n-1}$

نبين :

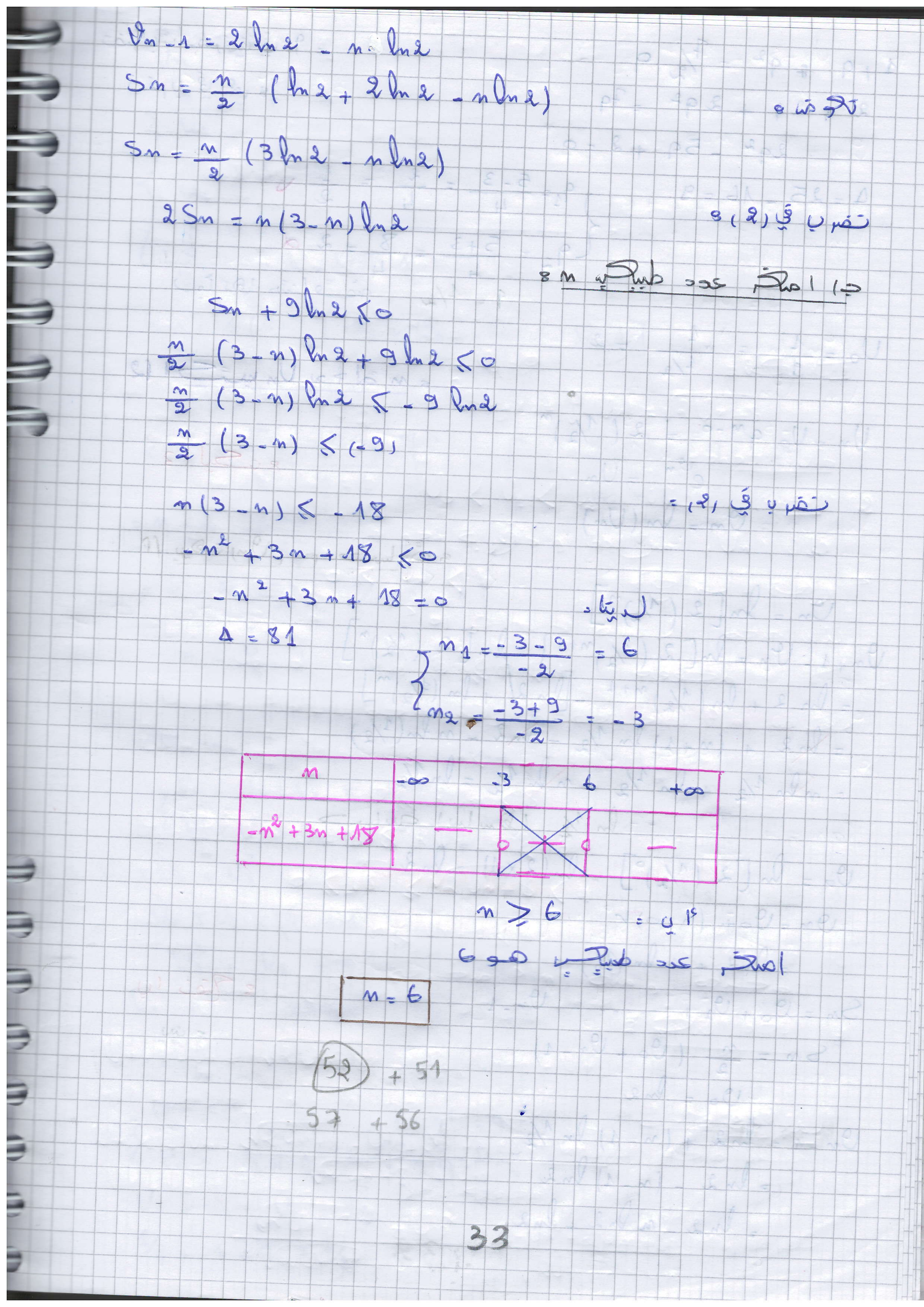
$S_n = \frac{n}{2}\left(\vartheta_0 + \vartheta_{n-1}\right)$

$\vartheta_0 = \ln 2$

$\vartheta_{n-1} = \ln 2 + (n-1)\ln\frac{1}{2}$

$= \ln 2 - (n-1)\ln 2$

$= \ln 2 - n\ln 2 + \ln 2$



لدينا :

$v_{n-1} = 2\ln 2 - n\ln 2$

$S_n = \frac{n}{2}(\ln 2 + 2\ln 2 - n\ln 2)$

$S_n = \frac{n}{2}(3\ln 2 - n\ln 2)$

نضرب في (2) :

$2S_n = n(3-n)\ln 2$

جـ) أصغر عدد طبيعي n :

$S_n + 9\ln 2 \leq 0$

$\frac{n}{2}(3-n)\ln 2 + 9\ln 2 \leq 0$

$\frac{n}{2}(3-n)\ln 2 \leq -9\ln 2$

$\frac{n}{2}(3-n) \leq (-9)$

نضرب في (2) :

$n(3-n) \leq -18$

$-n^2 + 3n + 18 \leq 0$

لدينا :

$-n^2 + 3n + 18 = 0$

$\Delta = 81$

$\begin{cases} n_1 = \frac{-3-9}{-2} = 6 \\ n_2 = \frac{-3+9}{-2} = -3 \end{cases}$

n	$-\infty$	-3	6	$+\infty$
$-n^2+3n+18$	$-$	0 $+$ 0		$-$

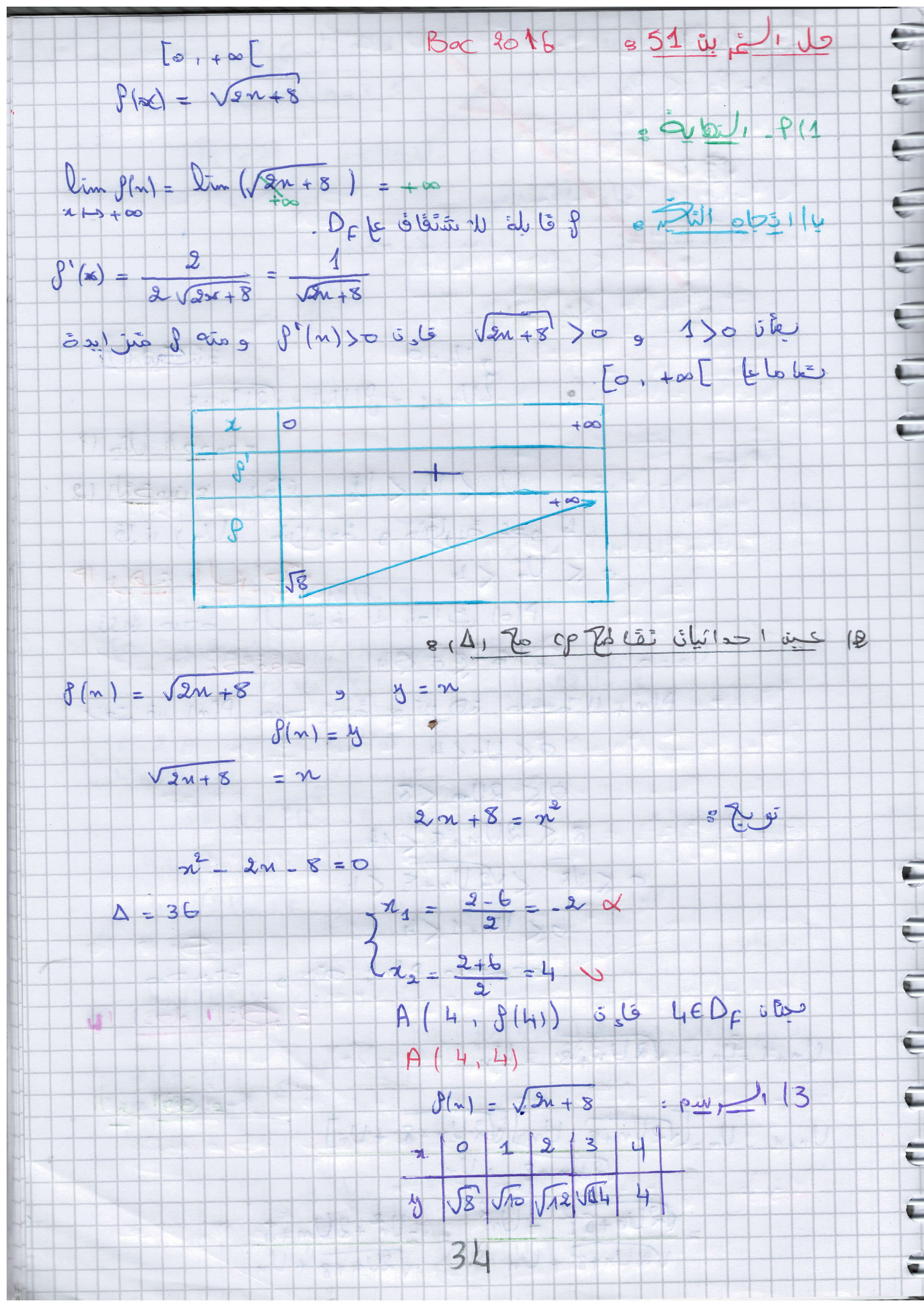
أي : $n \geq 6$

أصغر عدد طبيعي هو 6

$\boxed{n = 6}$

52 + 51

57 + 56



حل التمرين 51 : Bac 2016

$[0, +\infty[$

$f(x) = \sqrt{2x+8}$

1) أ- النهاية :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{2x+8}) = +\infty$

ب) اتجاه التغير : f قابلة للاشتقاق على D_f .

$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+8}} = \frac{1}{\sqrt{2x+8}}$

بما أن $1>0$ و $\sqrt{2x+8}>0$ فإن $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
f'	$+$
f	$\sqrt{8}$ ↗ $+\infty$

2) عين احداثيات تقاطع (C_f) مع (Δ) :

$f(x) = \sqrt{2x+8}$ و $y = x$

$f(x) = y$

$\sqrt{2x+8} = x$

نربع : $2x+8 = x^2$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Delta = 36$

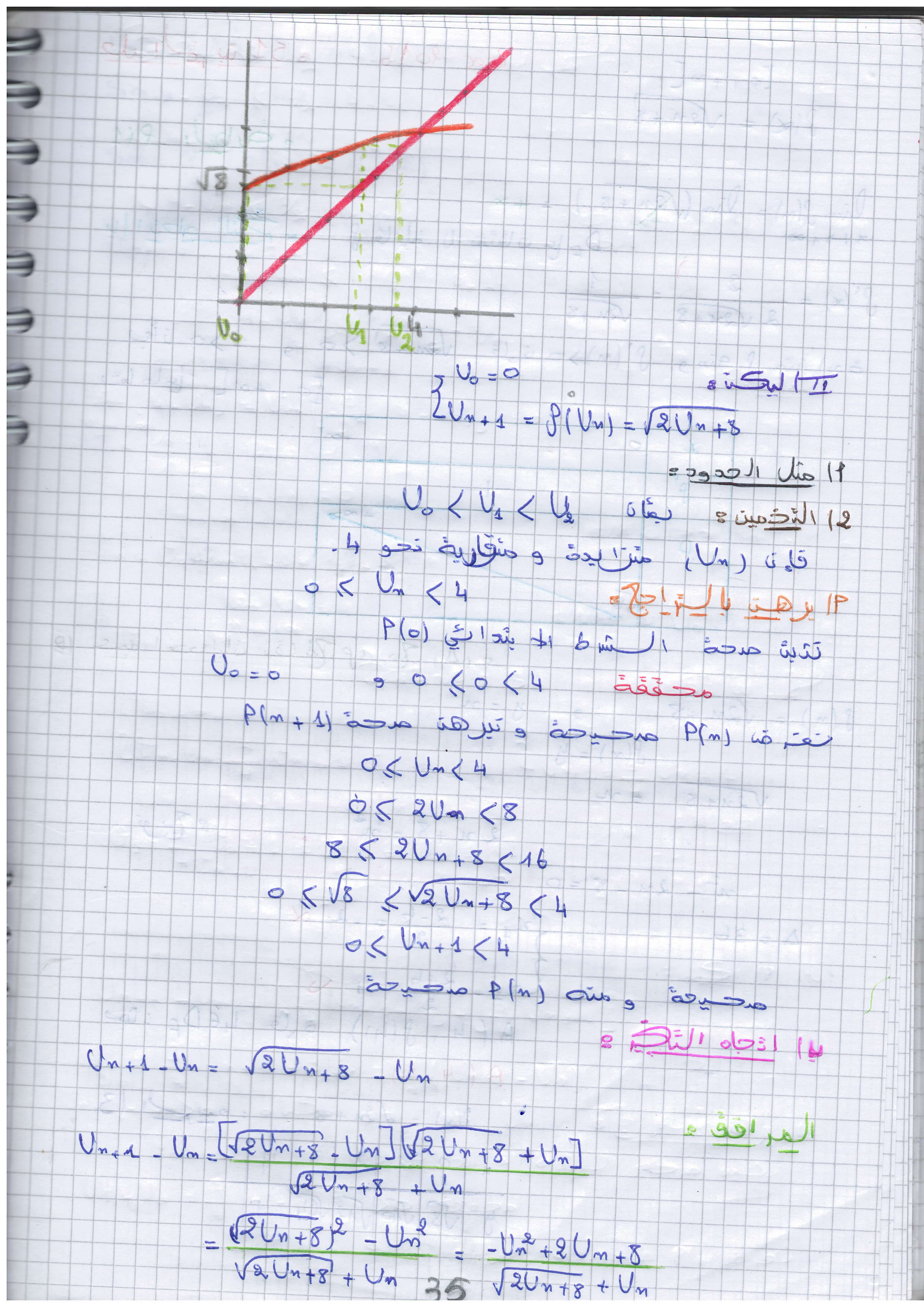
$\begin{cases} x_1 = \frac{2-6}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{2+6}{2} = 4 \end{cases}$

بما أن $4 \in D_f$ فإن $A(4, f(4))$

$A(4, 4)$

3) الرسم : $f(x) = \sqrt{2x+8}$

x	0	1	2	3	4
y	$\sqrt{8}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{14}$	4



II) ليكن:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) = \sqrt{2U_n+8} \end{cases}$$

1) تمثيل الحدود:

2) التخمين: بما أن $U_0 < U_1 < U_2$

فإن (U_n) متزايدة و متقاربة نحو 4.

3) برهن بالتراجع: $0 \leq U_n < 4$

تثبت صحة الشرط الابتدائي $P(0)$

$U_0 = 0$ و $0 \leq 0 < 4$ محققة

نعترف $P(n)$ صحيحة و نبرهن صحة $P(n+1)$

$$0 \leq U_n < 4$$

$$0 \leq 2U_n < 8$$

$$8 \leq 2U_n + 8 < 16$$

$$0 \leq \sqrt{8} \leq \sqrt{2U_n+8} < 4$$

$$0 \leq U_{n+1} < 4$$

صحيحة و منه $P(n)$ صحيحة

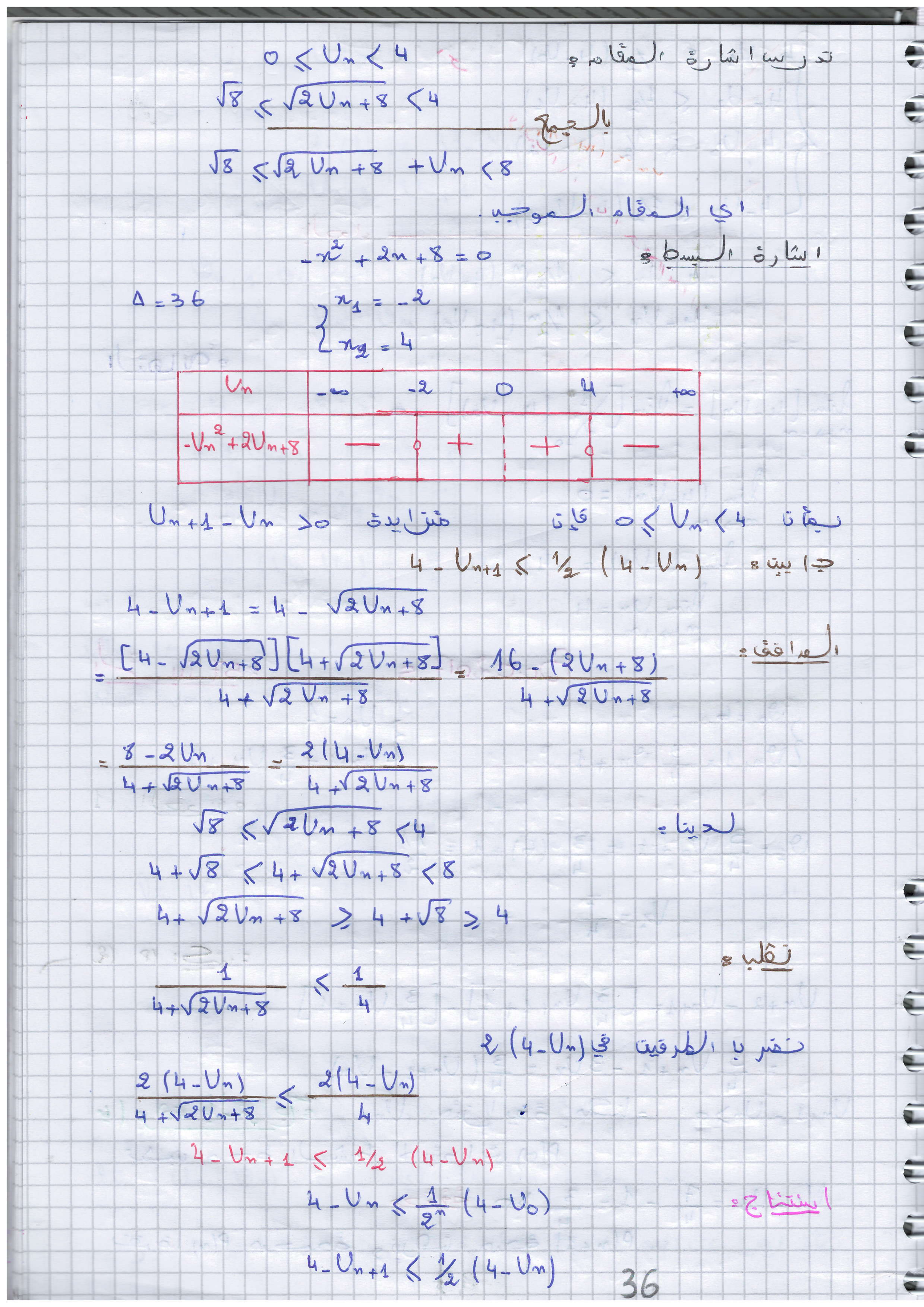
4) اتجاه التغير:

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2U_n+8} - U_n$$

المرافق:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{\left[\sqrt{2U_n+8} - U_n\right]\left[\sqrt{2U_n+8} + U_n\right]}{\sqrt{2U_n+8} + U_n}$$

$$= \frac{(\sqrt{2U_n+8})^2 - U_n^2}{\sqrt{2U_n+8} + U_n} = \frac{-U_n^2 + 2U_n + 8}{\sqrt{2U_n+8} + U_n}$$



ندرس اشارة المقام:

$$0 \leq U_n < 4$$

$$\sqrt{8} \leq \sqrt{2U_n+8} < 4$$

بالجمع

$$\sqrt{8} \leq \sqrt{2U_n+8} + U_n < 8$$

اي المقام موجب.

اشارة البسط:

$$-x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$\Delta = 36 \qquad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

U_n	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
$-U_n^2+2U_n+8$	$-$	0 $+$	$+$	0	$-$

بما ان $0 \leq U_n < 4$ فإن $U_{n+1} - U_n > 0$ متزايدة

اثبت: $4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$

$$4 - U_{n+1} = 4 - \sqrt{2U_n+8}$$

المرافق:

$$= \frac{\left[4 - \sqrt{2U_n+8}\right]\left[4 + \sqrt{2U_n+8}\right]}{4 + \sqrt{2U_n+8}} = \frac{16 - (2U_n+8)}{4 + \sqrt{2U_n+8}}$$

$$= \frac{8 - 2U_n}{4 + \sqrt{2U_n+8}} = \frac{2(4 - U_n)}{4 + \sqrt{2U_n+8}}$$

لدينا:

$$\sqrt{8} \leq \sqrt{2U_n+8} < 4$$

$$4 + \sqrt{8} \leq 4 + \sqrt{2U_n+8} < 8$$

$$4 + \sqrt{2U_n+8} \geq 4 + \sqrt{8} \geq 4$$

نقلب:

$$\frac{1}{4 + \sqrt{2U_n+8}} \leq \frac{1}{4}$$

نضرب الطرفين في $2(4-U_n)$

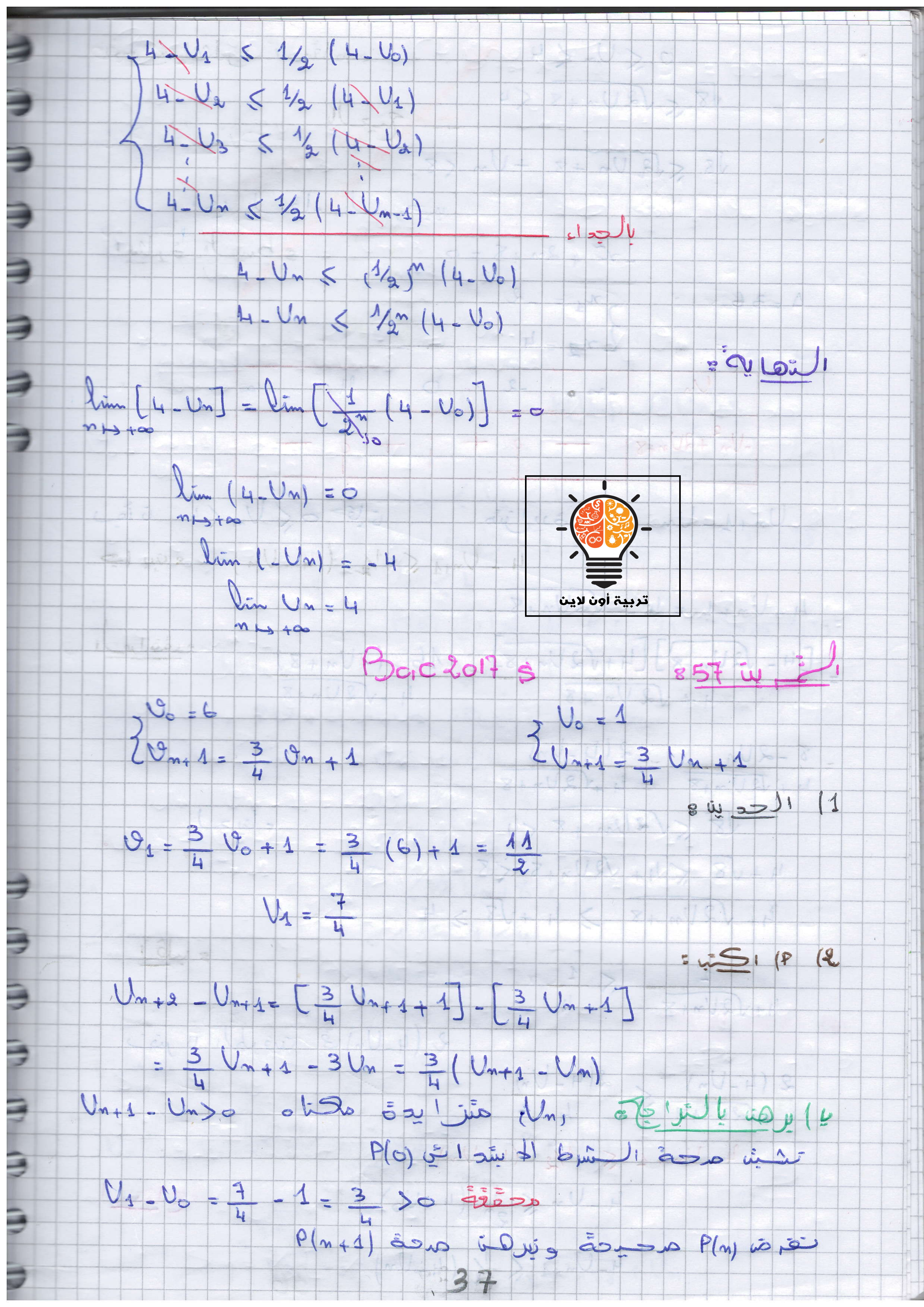
$$\frac{2(4-U_n)}{4+\sqrt{2U_n+8}} \leq \frac{2(4-U_n)}{4}$$

$$4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$$

استنتاج:

$$4 - U_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - U_0)$$

$$4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$$



$$\begin{cases} 4-U_1 \leq \frac{1}{2}(4-U_0) \\ 4-U_2 \leq \frac{1}{2}(4-U_1) \\ 4-U_3 \leq \frac{1}{2}(4-U_2) \\ \vdots \\ 4-U_n \leq \frac{1}{2}(4-U_{n-1}) \end{cases}$$

بالجداء

$$4-U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4-U_0)$$

$$4-U_n \leq \frac{1}{2^n}(4-U_0)$$

النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty}[4-U_n] = \lim\left[\frac{1}{2^n}(4-U_0)\right] = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}(4-U_n) = 0$$

$$\lim(-U_n) = -4$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 4$$

التمرين 57: Bac 2017 s

$$\begin{cases} \vartheta_0 = 6 \\ \vartheta_{n+1} = \frac{3}{4}\vartheta_n + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 1 \end{cases}$$

1) الحدين:

$$\vartheta_1 = \frac{3}{4}\vartheta_0 + 1 = \frac{3}{4}(6) + 1 = \frac{11}{2}$$

$$U_1 = \frac{7}{4}$$

2) أ) اكتب:

$$U_{n+2} - U_{n+1} = \left[\frac{3}{4}U_{n+1} + 1\right] - \left[\frac{3}{4}U_n + 1\right]$$

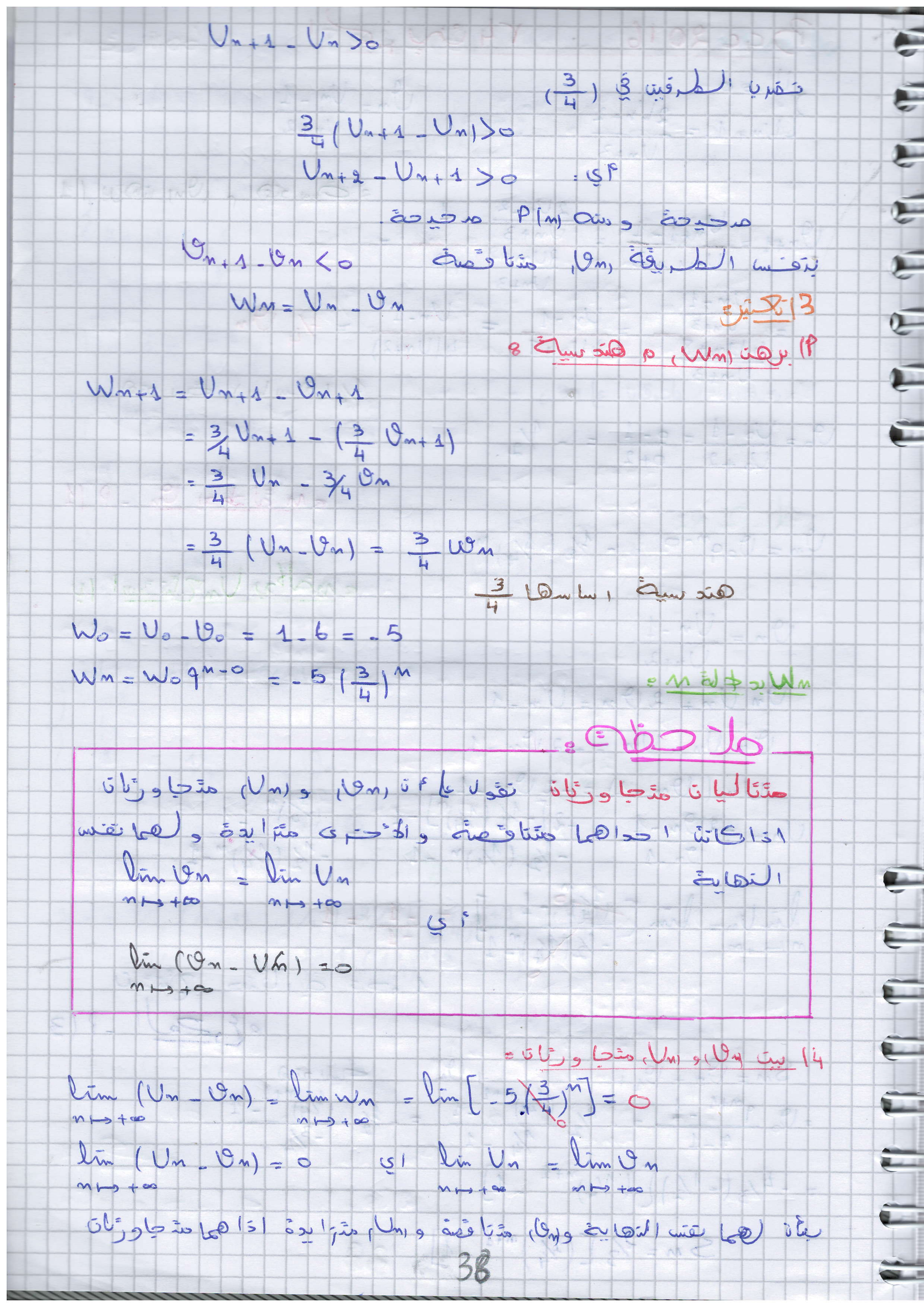
$$= \frac{3}{4}U_{n+1} - \frac{3}{4}U_n = \frac{3}{4}(U_{n+1} - U_n)$$

ب) برهن بالتراجع (U_n) متزايدة معناه $U_{n+1} - U_n > 0$

نثبت صحة الشرط الابتدائي $P(0)$

$$U_1 - U_0 = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4} > 0$$ محققة

نفرض $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$



$$U_{n+1} - U_n > 0$$

نضرب الطرفين في $(\frac{3}{4})$

$$\frac{3}{4}(U_{n+1} - U_n) > 0$$

أي: $U_{n+2} - U_{n+1} > 0$

صحيحة ومنه $P(n)$ صحيحة.

بنفس الطريقة (ϑ_n) متناقصة $\vartheta_{n+1} - \vartheta_n < 0$

$$W_n = U_n - \vartheta_n$$

3) نعتبر

أ) برهن (W_n) م هندسية:

$$W_{n+1} = U_{n+1} - \vartheta_{n+1}$$
$$= \frac{3}{4}U_n + 1 - (\frac{3}{4}\vartheta_n + 1)$$
$$= \frac{3}{4}U_n - \frac{3}{4}\vartheta_n$$
$$= \frac{3}{4}(U_n - \vartheta_n) = \frac{3}{4}W_n$$

هندسية أساسها $\frac{3}{4}$

$$W_0 = U_0 - \vartheta_0 = 1 - 6 = -5$$

W_n بدلالة n:

$$W_n = W_0 q^{n-0} = -5\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

ملاحظة:

متتاليات متجاورتان: نقول عن (ϑ_n) و (U_n) متجاورتان إذا كانت إحداهما متناقصة والأخرى متزايدة ولهما نفس النهاية

$$\lim_{n\to+\infty} \vartheta_n = \lim_{n\to+\infty} U_n$$

أي

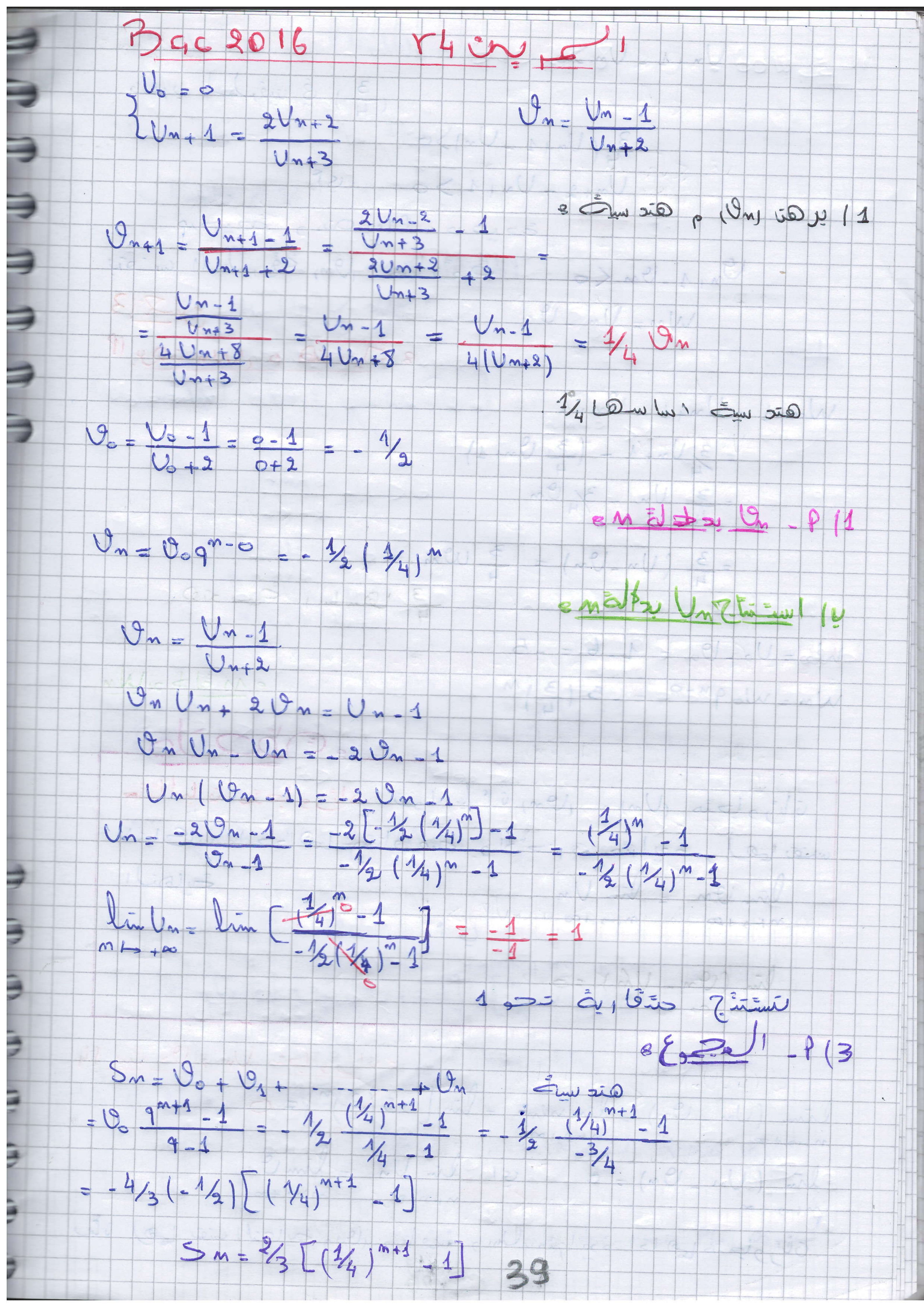
$$\lim_{n\to+\infty} (\vartheta_n - U_n) = 0$$

4) بين (ϑ_n) و (U_n) متجاورتان:

$$\lim_{n\to+\infty} (U_n - \vartheta_n) = \lim_{n\to+\infty} W_n = \lim \left[-5\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = 0$$

$\lim_{n\to+\infty} (U_n - \vartheta_n) = 0$ أي $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \vartheta_n$

بما أن لهما نفس النهاية و(ϑ_n) متناقصة و(U_n) متزايدة إذا هما متجاورتان



Bac 2016 التمرين 4

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n+2}{U_n+3} \end{cases} \qquad V_n = \frac{U_n - 1}{U_n+2}$$

1/ برهن ان (V_n) م هندسية :

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+2} = \frac{\dfrac{2U_n+2}{U_n+3} - 1}{\dfrac{2U_n+2}{U_n+3} + 2} = \frac{\dfrac{U_n-1}{U_n+3}}{\dfrac{4U_n+8}{U_n+3}} = \frac{U_n-1}{4U_n+8} = \frac{U_n-1}{4(U_n+2)} = \frac{1}{4} V_n$$

هندسية اساسها $\frac{1}{4}$

$$V_0 = \frac{U_0-1}{U_0+2} = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}$$

1/ ب- V_n بدلالة n :

$$V_n = V_0 q^{n-0} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

2/ استنتاج U_n بدلالة n :

$$V_n = \frac{U_n-1}{U_n+2}$$

$$V_n U_n + 2V_n = U_n - 1$$

$$V_n U_n - U_n = -2V_n - 1$$

$$U_n(V_n - 1) = -2V_n - 1$$

$$U_n = \frac{-2V_n - 1}{V_n - 1} = \frac{-2\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] - 1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim \left[\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}\right] = \frac{-1}{-1} = 1$$

نستنتج متقاربة نحو 1

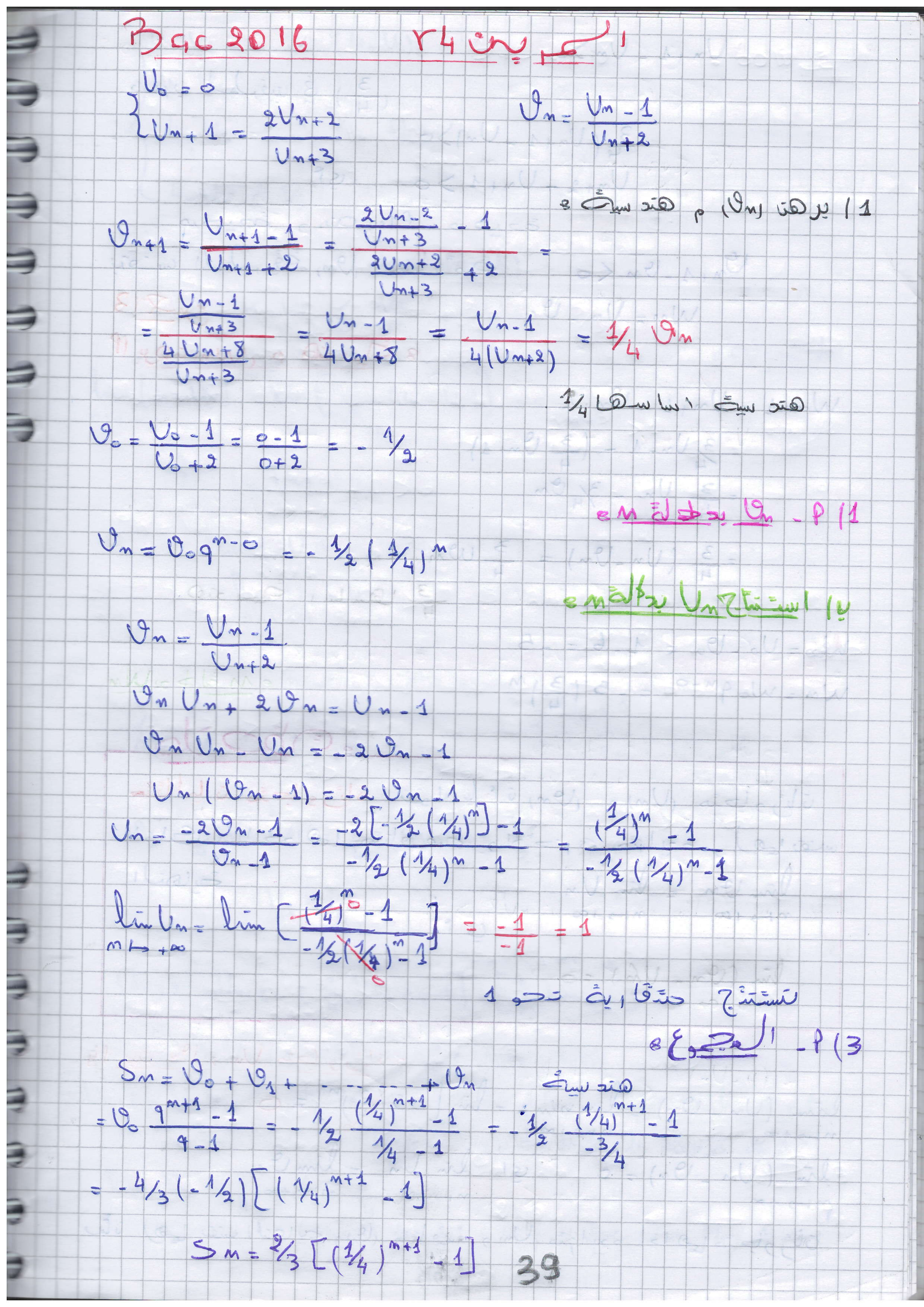
3/ ب- المجموع :

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$ هندسية

$$= V_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = -\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{3}{4}}$$

$$= -\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$$

$$S_n = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$$



Bac 2016 التمرين 4

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n+2}{U_n+3} \end{cases} \qquad v_n = \frac{U_n - 1}{U_n+2}$$

1/ برهن (v_n) م هندسية :

$$v_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+2} = \frac{\dfrac{2U_n+2}{U_n+3} - 1}{\dfrac{2U_n+2}{U_n+3} + 2} =$$

$$= \frac{\dfrac{U_n-1}{U_n+3}}{\dfrac{4U_n+8}{U_n+3}} = \frac{U_n-1}{4U_n+8} = \frac{U_n-1}{4(U_n+2)} = \frac{1}{4} v_n$$

هندسية اساسها $\frac{1}{4}$.

$$v_0 = \frac{U_0-1}{U_0+2} = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}$$

1/ ب- v_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 q^{n-0} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

ب/ استنتاج U_n بدلالة n :

$$v_n = \frac{U_n-1}{U_n+2}$$

$$v_n U_n + 2v_n = U_n - 1$$

$$v_n U_n - U_n = -2v_n - 1$$

$$U_n(v_n - 1) = -2v_n - 1$$

$$U_n = \frac{-2v_n - 1}{v_n - 1} = \frac{-2\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] - 1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim \left[\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}\right] = \frac{-1}{-1} = 1$$

نستنتج متقاربة نحو 1

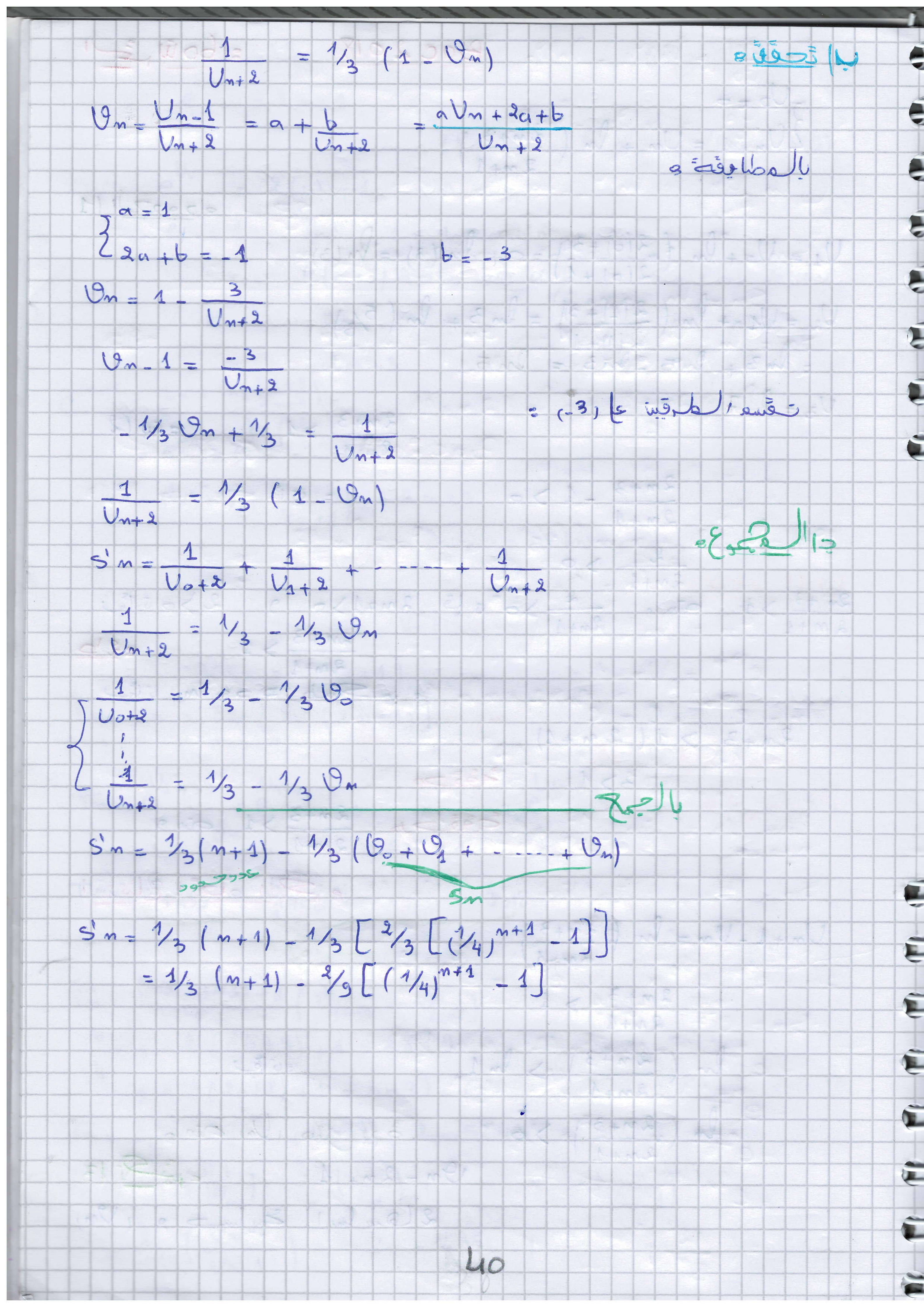
3/ ب- المجموع :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$ هندسية

$$= v_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = -\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{3}{4}}$$

$$= -\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$$

$$S_n = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$$



ب) تحقق:

$$\frac{1}{U_{n+2}} = \frac{1}{3}(1 - \vartheta_n)$$

$$\vartheta_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2} = a + \frac{b}{U_n + 2} = \frac{aU_n + 2a + b}{U_n + 2}$$

بالمطابقة:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \qquad b = -3$$

$$\vartheta_n = 1 - \frac{3}{U_{n+2}}$$

$$\vartheta_n - 1 = \frac{-3}{U_{n+2}}$$

تقسم الطرفين على (-3):

$$-\frac{1}{3}\vartheta_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{U_{n+2}}$$

$$\frac{1}{U_{n+2}} = \frac{1}{3}(1 - \vartheta_n)$$

د) المجموع:

$$S'_n = \frac{1}{U_0 + 2} + \frac{1}{U_1 + 2} + \cdots + \frac{1}{U_n + 2}$$

$$\frac{1}{U_n + 2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\vartheta_n$$

$$\begin{cases} \frac{1}{U_0 + 2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\vartheta_0 \\ \vdots \\ \frac{1}{U_n + 2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\vartheta_n \end{cases}$$

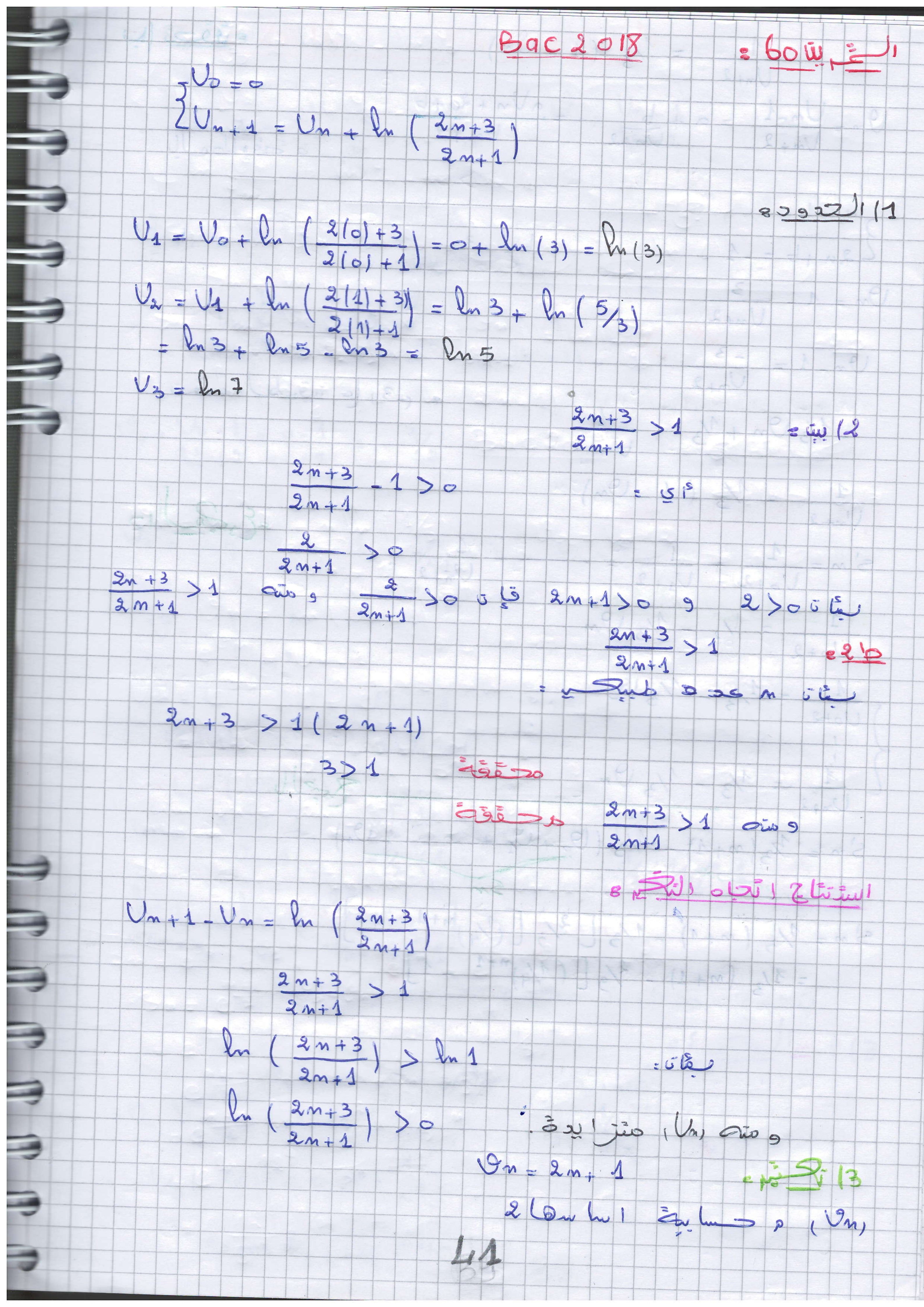
بالجمع

$$S'_n = \frac{1}{3}(n+1) - \frac{1}{3}(\underbrace{\vartheta_0 + \vartheta_1 + \cdots + \vartheta_n}_{S_n})$$

حدود

$$S'_n = \frac{1}{3}(n+1) - \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right]\right]$$

$$= \frac{1}{3}(n+1) - \frac{2}{9}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$$



التمرين 60 : Bac 2018

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) \end{cases}$$

1) الحدود:

$U_1 = U_0 + \ln\left(\frac{2(0)+3}{2(0)+1}\right) = 0 + \ln(3) = \ln(3)$

$U_2 = U_1 + \ln\left(\frac{2(1)+3}{2(1)+1}\right) = \ln 3 + \ln(5/3)$

$= \ln 3 + \ln 5 - \ln 3 = \ln 5$

$U_3 = \ln 7$

2) بيّن: $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$

أي: $\frac{2n+3}{2n+1} - 1 > 0$

$\frac{2}{2n+1} > 0$

بما أن $2 > 0$ و $2n+1 > 0$ فإن $\frac{2}{2n+1} > 0$ ومنه $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$

طـ2: $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$

بما أن n عدد طبيعي:

$2n+3 > 1(2n+1)$

$3 > 1$ محققة

ومنه $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ محققة

استنتاج اتجاه التغير:

$U_{n+1} - U_n = \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

بما أن:

$\frac{2n+3}{2n+1} > 1$

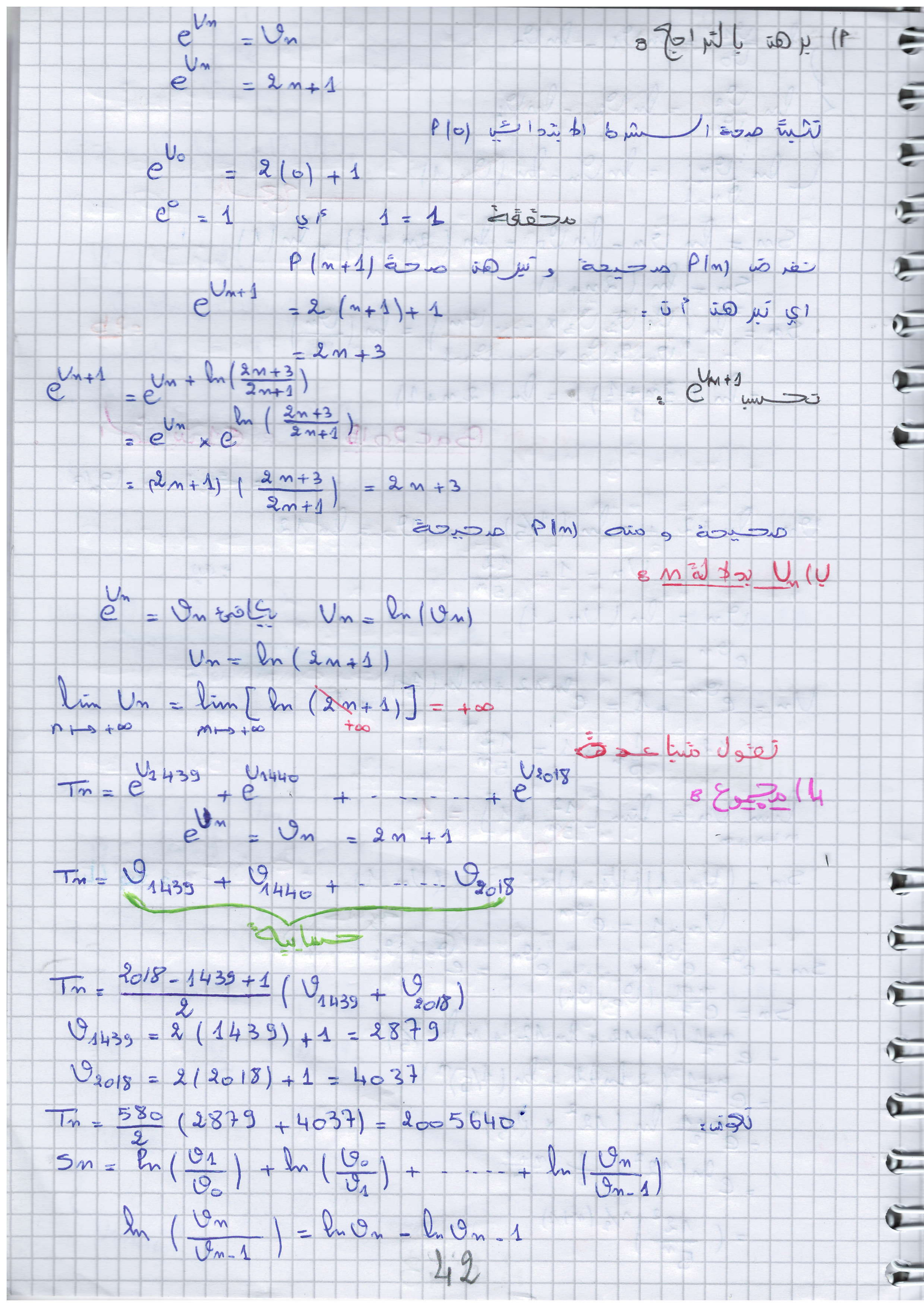
$\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > \ln 1$

$\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > 0$

ومنه (U_n) متزايدة.

3) نعتبر: $v_n = 2n+1$

(v_n) م حسابية أساسها 2



3) برهن بالتراجع :

$$e^{U_n} = \vartheta_n$$

$$e^{U_n} = 2n+1$$

نثبت صحة الشرط الابتدائي $P(0)$

$$e^{U_0} = 2(0)+1$$

$e^{0} = 1$ أي $1 = 1$ محققة

نفرض $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$

أي نبرهن أن : $e^{U_{n+1}} = 2(n+1)+1$

$$= 2n+3$$

نحسب $e^{U_{n+1}}$:

$$e^{U_{n+1}} = e^{U_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}$$

$$= e^{U_n} \times e^{\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)}$$

$$= (2n+1)\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) = 2n+3$$

صحيحة ومنه $P(n)$ صحيحة

ب) U_n بدلالة n :

$e^{U_n} = \vartheta_n$ يكافئ $U_n = \ln(\vartheta_n)$

$$U_n = \ln(2n+1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\ln(2n+1)\right] = +\infty$$

نقول متباعدة

4) المجموع :

$$T_n = e^{U_{1439}} + e^{U_{1440}} + \dots + e^{U_{2018}}$$

$$e^{U_n} = \vartheta_n = 2n+1$$

$$T_n = \vartheta_{1439} + \vartheta_{1440} + \dots + \vartheta_{2018}$$

حسابية

$$T_n = \frac{2018-1439+1}{2}\left(\vartheta_{1439} + \vartheta_{2018}\right)$$

$$\vartheta_{1439} = 2(1439)+1 = 2879$$

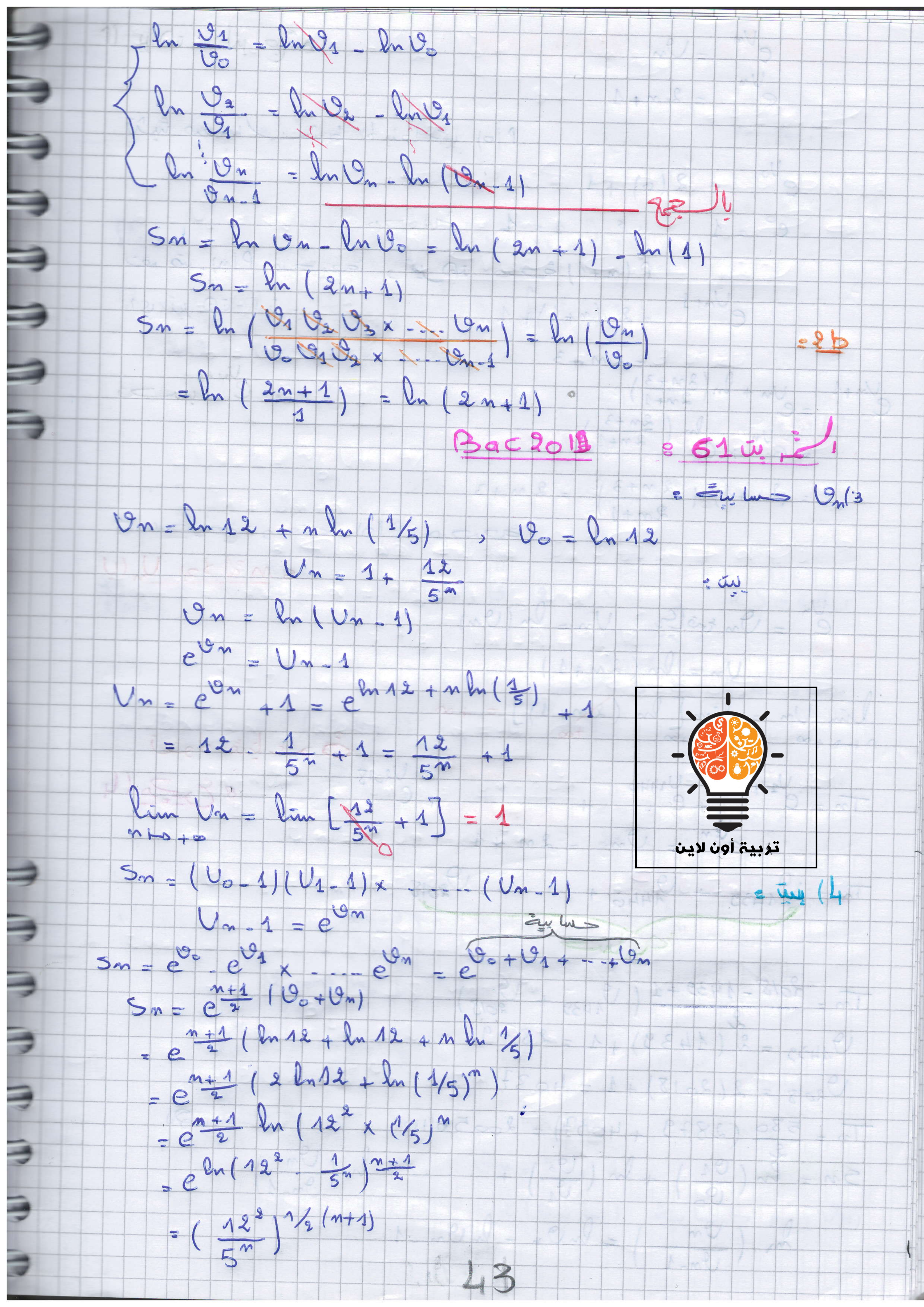
$$\vartheta_{2018} = 2(2018)+1 = 4037$$

$$T_n = \frac{580}{2}(2879+4037) = 2005640$$

نحسب :

$$S_n = \ln\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_0}\right) + \ln\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{\vartheta_n}{\vartheta_{n-1}}\right)$$

$$\ln\left(\frac{\vartheta_n}{\vartheta_{n-1}}\right) = \ln\vartheta_n - \ln\vartheta_{n-1}$$



$$\begin{cases} \ln \dfrac{v_1}{v_0} = \ln v_1 - \ln v_0 \\ \ln \dfrac{v_2}{v_1} = \ln v_2 - \ln v_1 \\ \vdots \\ \ln \dfrac{v_n}{v_{n-1}} = \ln v_n - \ln (v_{n-1}) \end{cases}$$

بالجمع

$$S_n = \ln v_n - \ln v_0 = \ln(2n+1) - \ln(1)$$

$$S_n = \ln(2n+1)$$

2b :

$$S_n = \ln\left(\frac{v_1 v_2 v_3 \times \dots v_n}{v_0 v_1 v_2 \times \dots v_{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{v_n}{v_0}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2n+1}{1}\right) = \ln(2n+1)$$

التمرين 61 : Bac 2018

3) v_n حسابية :

$$v_n = \ln 12 + n \ln(1/5) \quad , \quad v_0 = \ln 12$$

بين :

$$U_n = 1 + \frac{12}{5^n}$$

$$v_n = \ln(U_n - 1)$$

$$e^{v_n} = U_n - 1$$

$$U_n = e^{v_n} + 1 = e^{\ln 12 + n \ln\left(\frac{1}{5}\right)} + 1$$

$$= 12 \cdot \frac{1}{5^n} + 1 = \frac{12}{5^n} + 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim \left[\frac{12}{5^n} + 1\right] = 1$$

4) بين :

$$S_n = (U_0 - 1)(U_1 - 1) \times \dots (U_n - 1)$$

$$U_n - 1 = e^{v_n}$$

$$S_n = e^{v_0} \cdot e^{v_1} \times \dots e^{v_n} = e^{\overbrace{v_0 + v_1 + \dots + v_n}^{\text{حسابية}}}$$

$$S_n = e^{\frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)}$$

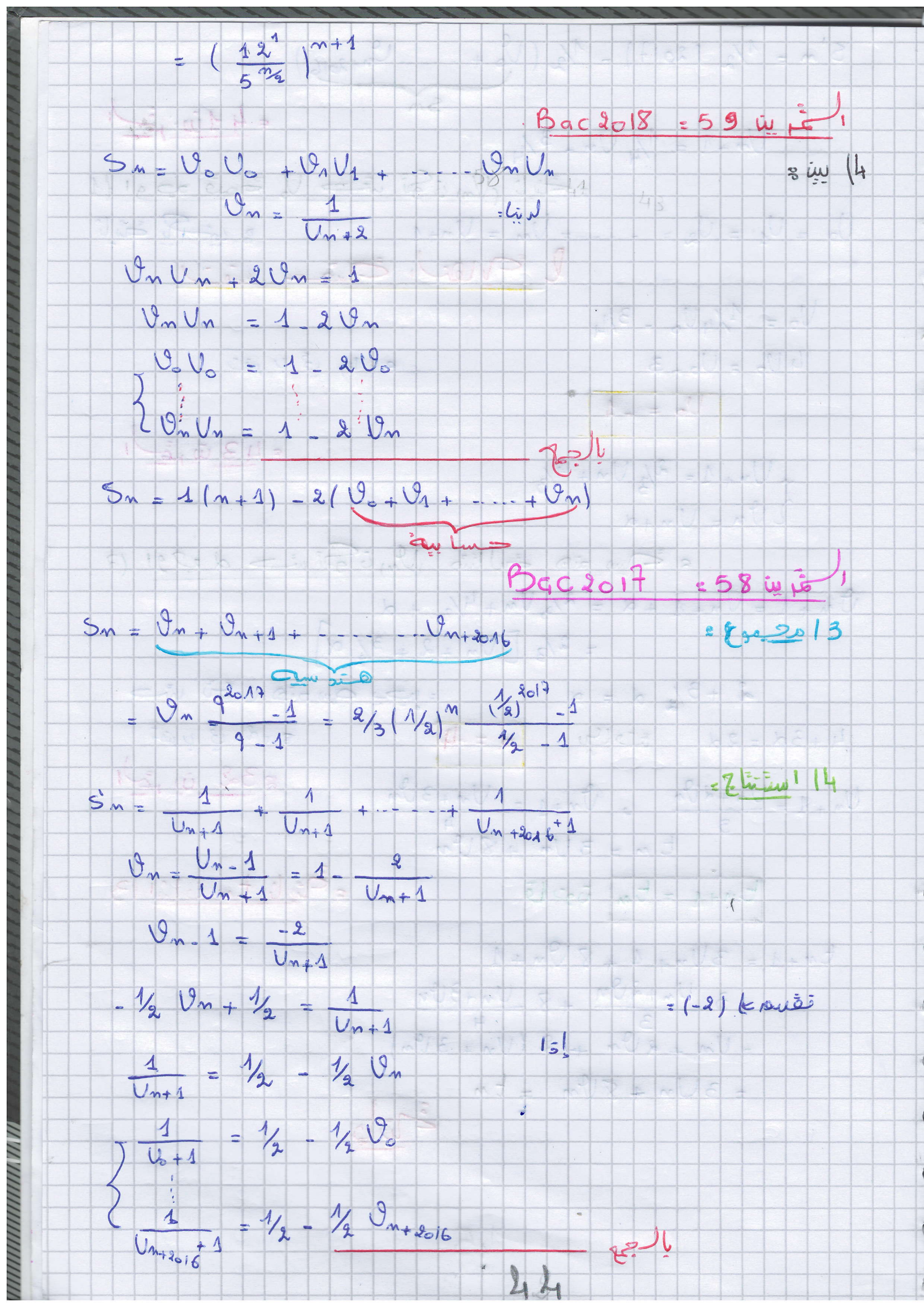
$$= e^{\frac{n+1}{2}\left(\ln 12 + \ln 12 + n \ln \frac{1}{5}\right)}$$

$$= e^{\frac{n+1}{2}\left(2 \ln 12 + \ln (1/5)^n\right)}$$

$$= e^{\frac{n+1}{2} \ln\left(12^2 \times (1/5)^n\right)}$$

$$= e^{\ln\left(12^2 \cdot \frac{1}{5^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$= \left(\frac{12^2}{5^n}\right)^{1/2\,(n+1)}$$



$$= \left(\frac{12^1}{5^{n/2}}\right)^{n+1}$$

التمرين 59 : Bac 2018

4) بيّن :

$$S_n = \vartheta_0 U_0 + \vartheta_1 U_1 + \dots + \vartheta_n U_n$$

لدينا: $\vartheta_n = \frac{1}{U_n + 2}$

$$\vartheta_n U_n + 2\vartheta_n = 1$$

$$\vartheta_n U_n = 1 - 2\vartheta_n$$

$$\begin{cases} \vartheta_0 U_0 = 1 - 2\vartheta_0 \\ \vdots \\ \vartheta_n U_n = 1 - 2\vartheta_n \end{cases}$$

بالجمع

$$S_n = 1(n+1) - 2(\underbrace{\vartheta_0 + \vartheta_1 + \dots + \vartheta_n}_{\text{حسابية}})$$

التمرين 58 : Bac 2017

3) مجموع :

$$S_n = \underbrace{\vartheta_n + \vartheta_{n+1} + \dots + \vartheta_{n+2016}}_{\text{هندسية}}$$

$$= \vartheta_n \frac{q^{2017} - 1}{q - 1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2017} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

4) استنتاج :

$$S'_n = \frac{1}{U_n + 1} + \frac{1}{U_{n+1}} + \dots + \frac{1}{U_{n+2016} + 1}$$

$$\vartheta_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1} = 1 - \frac{2}{U_n + 1}$$

$$\vartheta_n - 1 = \frac{-2}{U_n + 1}$$

نقسم على (-2) :

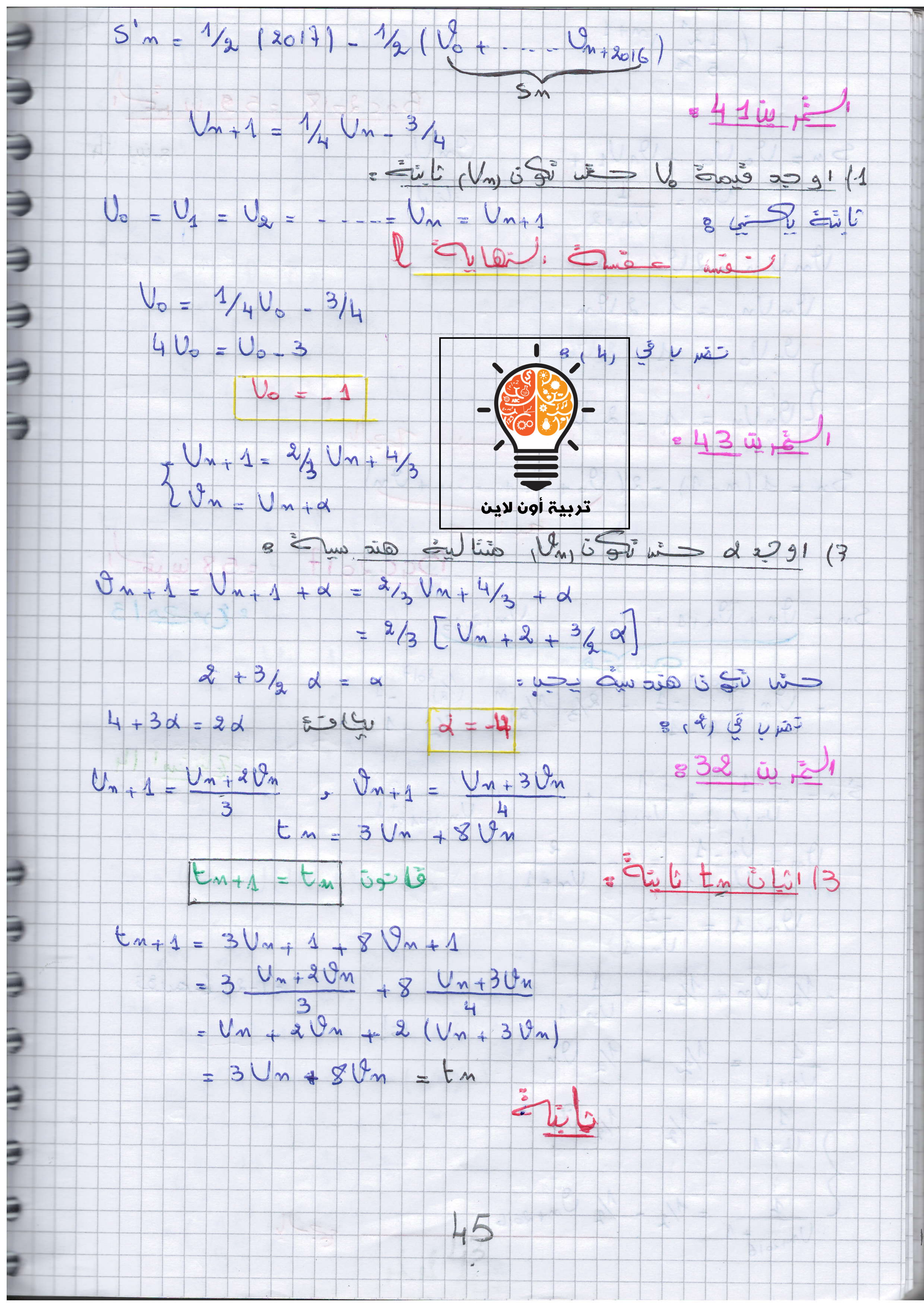
$$-\frac{1}{2}\vartheta_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{U_n + 1}$$

إذا

$$\frac{1}{U_n + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\vartheta_n$$

$$\begin{cases} \frac{1}{U_0 + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\vartheta_0 \\ \vdots \\ \frac{1}{U_{n+2016} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\vartheta_{n+2016} \end{cases}$$

بالجمع



$$S'_n = \frac{1}{2}(2017) - \frac{1}{2}\underbrace{(v_0 + \dots + v_{n+2016})}_{S_n}$$

التمرين 41 :

$$U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n - \frac{3}{4}$$

1) اوجد قيمة U_0 حتى تكون (U_n) ثابتة :

ثابتة يعني : $U_0 = U_1 = U_2 = \dots = U_n = U_{n+1}$

نفسه عكسه النهاية l

$$U_0 = \frac{1}{4}U_0 - \frac{3}{4}$$

$$4U_0 = U_0 - 3$$

$$\boxed{U_0 = -1}$$

تضرب في (4) :

التمرين 43 :

$$\begin{cases} U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{4}{3} \\ v_n = U_n + \alpha \end{cases}$$

2) اوجد α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية :

$$v_{n+1} = U_{n+1} + \alpha = \frac{2}{3}U_n + \frac{4}{3} + \alpha$$

$$= \frac{2}{3}\left[U_n + 2 + \frac{3}{2}\alpha\right]$$

حتى تكون هندسية يجب : $2 + \frac{3}{2}\alpha = \alpha$

تضرب في (2) :

$4 + 3\alpha = 2\alpha$ يكافئ $\boxed{\alpha = -4}$

التمرين 32 :

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 2v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{U_n + 3v_n}{4}$$

$$t_n = 3U_n + 8v_n$$

3) اثبات t_n ثابتة :

$\boxed{t_{n+1} = t_n}$ قانون

$$t_{n+1} = 3U_{n+1} + 8v_{n+1}$$

$$= 3\,\frac{U_n + 2v_n}{3} + 8\,\frac{U_n + 3v_n}{4}$$

$$= U_n + 2v_n + 2(U_n + 3v_n)$$

$$= 3U_n + 8v_n = t_n$$

ثابتة